ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 6 №1 2000

УДК 517.917

РАВНОМЕРНАЯ ДОСТИЖИМОСТЬ И ЛЯПУНОВСКАЯ ПРИВОДИМОСТЬ БИЛИНЕЙНОЙ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ[1]

Е. Л. Тонков

Изучается задача управления асимптотическими характеристиками (в частности, показателями Ляпунова) семейства систем дифференциальных уравнений (параметризованного с помощью динамической системы), линейных по фазовым координатам и управлениям (билинейных систем). Выделен класс систем (так называемые согласованные системы), допускающих ляпуновскую приводимость к правильной системе с заданными показателями Ляпунова. Дан обзор основных работ по рассматриваемой тематике, рассмотрены примеры.

1. Введение

Изучаемые в этой работе задачи можно рассматривать как естественное развитие основной тематики классической теории регулирования, состоящей в построении линейной обратной связи (часто именуемой отрицательной обратной связью), стабилизирующей исходный объект. В классической постановке обычно изучаются системы, поведение которых моделируется линейными дифференциальными уравнениями или системами линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и тем самым вопрос сводится к перемещению (в нужном направлении) полюсов передаточной функции системы.

В другой терминологии эти задачи можно интерпретировать как задачи управления показателями Ляпунова, что дает возможность расширить класс изучаемых объектов, включив в него нестационарные системы дифференциальных уравнений (о необходимости такого расширения для ряда прикладных задач сказано ниже). Таким образом, появляется возможность привлечения активно развивающейся теории показателей Ляпунова (и абстрактной теории динамических систем) к изучению чисто управленческих задач.

Задачи управления показателями Ляпунова неоднократно обсуждались на семинаре академика Андрея Измайловича Субботина, внимательное отношение и полезные замечания которого оказали существенное влияние на дальнейшее развитие этой тематики.

Здесь доказаны теоремы, анонсированные в [1] и [2] (см. § 9 и § 10), а также получены некоторые новые утверждения (см. § 7), относящиеся к задачам управления (в локальной и глобальной постановке) показателями Ляпунова и задачам ляпуновской приводимости билинейной управляемой системы дифференциальных уравнений.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 97–01–00413 и 99–01–00454) и конкурсного центра фундаментального естествознания (грант 97–0–1.9).

Билинейные системы возникают как системы линейного приближения для нелинейной системы в окрестности магистрального [3] (в частности, периодического [4] или почти периодического [5]) процесса, в задачах стабилизации линейных систем с наблюдателем [6–13] и многих других приложениях. Поясним сказанное на примере.

Пусть $\widehat{z}(t) = \big(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t)\big)$ – допустимый процесс (возможно оптимальный в смысле некоторого заданного функционала качества), определенный для всех $t \in \mathbb{R}$ и отвечающий управляемой системе

$$\dot{x} = v(t,x,u), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad u \in U \subset \mathbb{R}^m. \tag{1.1}$$

Например, процесс $\widehat{z}(t)$ может быть периодическим или почти периодическим по t в задаче об оптимальном управлении периодическими (соответственно почти периодическими) процессами некоторого управляемого объекта. Для надежного функционирования управляемого объекта процесс $\widehat{z}(t)$ должен быть в определенном смысле устойчив. Введем в рассмотрение отклонение $\delta z(t) = \big(\delta x(t), \delta u(t)\big)$ процесса $z(t) = \widehat{z}(t) + \delta z(t)$ от $\widehat{z}(t)$. Тогда система уравнений в отклонениях запишется в виде

$$(\delta x)^{\boldsymbol{\cdot}} = A(t, \widehat{z}(t), \delta z)\delta x + B(t, \widehat{z}(t), \delta z)\delta u, \quad \delta u \in \widehat{U}(t) \doteq U - \widehat{u}(t), \tag{1.2}$$

а система линейного приближения, отвечающая системе (1.2) – в виде

$$(\delta x)^{\boldsymbol{\cdot}} = A(t, \widehat{z}(t), 0)\delta x + B(t, \widehat{z}(t), 0)\delta u, \quad (t, \delta x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad \delta u \in \widehat{U}(t). \tag{1.3}$$

Предположим, что управление δu, корректирующее движения системы (1.1) в окрестности $\widehat{x}(t)$, можно формировать в виде линейной обратной связи $\delta u = \mathbf{U}(t)\delta x$ (другими словами, управление $\mathbf{U}(t)\delta x \in \widehat{U}(t)$ при δx близких к нулю), где $(m \times n)$-матрица $\mathbf{U}(t)$ интерпретируется как матрица управляющих параметров $\mathbf{u}_{ij}(t)$, $|\mathbf{U}(t)| \leqslant 1$. Тогда система (1.2), замкнутая управлением $\delta u = \mathbf{U}(t)\delta x$, запишется в виде

$$(\delta x)^{\boldsymbol{\cdot}} = \big(\widehat{A}(t, \delta x) + \widehat{B}(t, \delta x)\mathbf{U}(t)\big)\delta x, \quad (t, \delta x) \in \mathbb{R}^{1+n}, \quad |\mathbf{U}(t)| \leqslant 1,$$

где $\widehat{A}(t, \delta x) = A(t, \widehat{z}(t), \delta x, \mathbf{U}(t)\delta x)$, $\widehat{B}(t, \delta x) = B(t, \widehat{z}(t), \delta x, \mathbf{U}(t)\delta x)$.

Одна из задач, возникающая в связи с задачей о стабилизации процесса $\widehat{z}(t)$, состоит в следующем: *требуется построить допустимое управление* $\mathbf{U}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, *такое, что для фиксированного множества* $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^n$, *показатели Ляпунова* $\lambda_1(p, \mathbf{U}), \ldots, \lambda_n(p, \mathbf{U})$ *всех систем*

$$(\delta x)^{\boldsymbol{\cdot}} = \big(\widehat{A}\big(t, p(t)\big) + \widehat{B}\big(t, p(t)\big)\mathbf{U}(t)\big)\delta x, \quad p(t) \in \mathbf{P}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

находятся в заранее заданном множестве Λ, *расположенном на числовой прямой* $\mathbb{R}$ ($\lambda_i(p, \mathbf{U}) \in \Lambda$, $i = 1, \ldots, n$). *При этом управление* $\mathbf{U}(\cdot)$ *не должно зависеть от* $p(\cdot)$ (*т.е.* $\mathbf{U}(\cdot)$ *строится для системы* (1.3)) *и очень желательно, чтобы управление* $\mathbf{U}(\cdot)$ *было “ неупреждающим”, т.е. должен существовать алгоритм построения* $\mathbf{U}(\cdot)$ *такой, что при вычислении* $\mathbf{U}(t)$ *в момент времени* t *не используется информация о матрицах* $\widehat{A}(s, 0)$ *и* $\widehat{B}(s, 0)$ *при* $s > t$. *Кроме того, если матрицы* $\widehat{A}(t, 0)$ *и* $\widehat{B}(t, 0)$ *обладают свойством “ возвращаемости”* (*например они почти периодичны или рекуррентны по* t), *то желательно, чтобы таким же свойством возвращаемости обладало управление* $\mathbf{U}(t)$.

Это одна из многочисленных задач, связанных с управлением асимптотическими характеристиками динамических систем, удовлетворительное решение которой пока отсутствует.

2. Основные обозначения

Пусть $\mathbb{R}^n$ – евклидово пространство размерности n, $|x| = \sqrt{x^*x}$ – норма в $\mathbb{R}^n$ (звезда означает операцию транспонирования). Если не оговорено другое, векторы-столбцы обозначаются латинскими буквами, векторы-строки – греческими (таким образом, запись ξx следует понимать как скалярное произведение векторов ξ и x); $\mathcal{O}^n_\sigma(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leqslant \sigma\}$, $\mathcal{O}^n_\sigma = \mathcal{O}^n_\sigma(0)$. Для произвольного множества $D \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathrm{int}D$ – внутренность, $\mathcal{O}^n_\varepsilon(D)$ – ε-окрестность множества D.

Пространство $\mathbb{M}(n,m)$ линейных операторов из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ будем отождествлять с пространством матриц размерности $n\times m$ (если $n = m$, то пишем $\mathbb{M}(n)$); $|A| = \max\{|Ax| : |x| = 1\}$ – норма в $\mathbb{M}(n,m)$. Для $Q \in \mathbb{M}(n,m)$ обозначим $\mathcal{B}_\varepsilon(Q) = \{H \in \mathbb{M}(n,m) : |H - Q| \leqslant \varepsilon\}$, $\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon(0)$ (индексы m и n в обозначении $\mathcal{B}_\varepsilon(Q)$ опускаем, если ясно о каком пространстве идет речь). Группу $GL_+(n,\mathbb{R})$ вещественных невырожденных матриц порядка n с положительным определителем обозначим $\mathbb{G}_+(n)$.

Введем в рассмотрение [14, гл. 5] топологическую динамическую систему (Ω, f^t) (Ω – полное метрическое сепарабельное пространство, f^t — поток на Ω, т.е. однопараметрическая группа преобразований Ω в себя, непрерывная по $(t,\omega) \in \mathbb{R}\times\Omega$). Обозначим через $\gamma(\omega)$ траекторию движения $t \to f^t\omega$, $\overline{\gamma}(\omega)$ – замыкание $\gamma(\omega)$ в метрике пространства Ω. Напомним, что множество $E \subset \Omega$ называется инвариантным, если $f^tE \subset E$ при всех $t \in \mathbb{R}$, и E называется минимальным, если оно инвариантно, компактно и $\overline{\gamma}(\omega) = E$ для каждого $\omega \in E$. Если E минимально, то имеет место равенство $\overline{\gamma}(\omega) = \overline{\gamma}_+(\omega)$ для каждого $\omega \in E$, где $\gamma_+(\omega) \doteq \{f^t\omega : \ t \in \mathbb{R}_+\}$, $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$. Отметим, что всякое компактное инвариантное множество E в Ω содержит по крайней мере одно минимальное подмножество; далее, если $\overline{\gamma}_+(\omega)$ компактно, то ω-предельное множество $L_+(\omega)$ точки ω непусто, инвариантно и компактно, и для всякого компактного E определена зона притяжения $W^s(E) \doteq \{\omega \in \Omega\colon\ L^+(\omega) \subset E\}$.

Будем говорить, что функция $\omega \to F(\omega)$, определенная на Ω и принимающая значения в конечномерном пространстве, удовлетворяет *основному условию*, если для каждого $\omega_0 \in \Omega$ функция $t \to |F(f^t\omega_0)|$ измерима по Лебегу, ограничена на $\mathbb{R}$ и для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$\max_{|t|\leqslant N} \int_t^{t+1} |F(f^s\omega) - F(f^s\omega_0)|ds < \varepsilon$$

выполнено, как только $\rho(\omega,\omega_0) < \delta$ (ρ – метрика в Ω).

Каждой паре $(\mathbb{A},\omega)$, где $\mathbb{A} \doteq (A_0, A_1, \ldots, A_r) : \Omega \to \mathbb{M}(n,m)$, $m = n(r+1)$ и вектору $u = \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_r)$ поставим в соответствие билинейную систему

$$\dot{x} = A_0(f^t\omega)x + u_1A_1(f^t\omega)x + \cdots + u_rA_r(f^t\omega)x. \qquad (2.1)$$

Будем предполагать, что $\mathbb{A}$ удовлетворяет *основному условию* и отождествлять систему (2.1) с парой $(\mathbb{A},\omega)$.

Пусть $A = (A_1,\ldots,A_r)$, $A_i \in \mathbb{M}(n)$, $u = \mathrm{col}(u_1,\ldots,u_r) \in \mathbb{R}^r$. Обозначим $u^*\diamond A = A\diamond u \doteq u_1A_1 + \cdots + u_rA_r$. Кроме того, если это не вызывает разночтений, в записи $(u^*\diamond A)x$, где $x \in \mathbb{R}^n$, скобки будем опускать:

$$(u^*\diamond A)x \doteq u^*\diamond Ax = u_1A_1x + \cdots + u_rA_rx = (A\diamond u)x \doteq Ax\diamond u.$$

Аналогично, если $X \in \mathbb{M}(n)$, то по определению

$$u^* \diamond AX \doteq (u^* \diamond A)X = u_1 A_1 X + \dots + u_r A_r X = (A \diamond u)X \doteq AX \diamond u.$$

Отметим еще, что $|AX \diamond u| \leqslant \|A\| |X| |u|_1$, где $|u|_1 = \max\{|u_1|, \dots, |u_r|\}$, $\|A\| = |A_1| + \dots + |A_r|$.

В принятых обозначениях систему (2.1) можно записать в виде

$$\dot{x} = \big(A_0(f^t\omega) + u^* \diamond A(f^t\omega)\big)\, x, \tag{2.2}$$

а матричное уравнение, отвечающее (2.1), – в виде:

$$\dot{X} = \big(A_0(f^t\omega) + u^* \diamond A(f^t\omega)\big)X. \tag{2.3}$$

З а м е ч а н и е. При каждом фиксированном $p(\cdot)$ систему (1.4) можно записать в виде (2.1), занумеровав управления $\mathbf{u}_{ij}(t)$ одним индексом.

Пусть $x_u(t)$ – произвольное нетривиальное решение системы уравнений (2.2) при некотором допустимом управлении $u = u(t, \omega)$. Напомним, что число $\lambda(x_u) = \overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln |x_u(t)|$ называется *показателем Ляпунова* решения $x_u(t)$. Оказывается, что система (2.2) имеет (при фиксированном управлении) не более n различных показателей Ляпунова [15] и существует базис решений системы (2.2), на котором реализуются все показатели. Обозначим их $\lambda_i(\omega) = \lambda_i(\mathbb{A}, \omega, u)$, $i = 1, \dots, n$. Обычно показатели упорядочивают в порядке возрастания ($\lambda_1(\omega) \leqslant \lambda_2(\omega) \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n(\omega)$); без особой необходимости мы этого делать не будем.

Система $\dot{x} = A(t)x$ с показателями Ляпунова $\lambda_i(A)$ называется *правильной* [15, стр. 284], если числа $-\lambda_i(A)$, $i = 1, \dots, n$, образуют полную совокупность показателей Ляпунова сопряженной системы $\dot{\xi} = -\xi A(t)$.

Линейное преобразование $y = L(t)x$ системы $\dot{x} = A(t)x$ называется *преобразованием Ляпунова*, если $\sup_t\{|L(t)| + |L^{-1}(t)| + |dL(t)/dt|\} < \infty$. Преобразование Ляпунова сохраняет показатели Ляпунова и свойство правильности [15, стр. 74].

3. Краткий обзор основных результатов

Задача о глобальной управляемости показателей Ляпунова стационарной системы уравнений $\dot{x} = (A + BU)x$, где $x \in \mathbb{R}^n$, (матрица $U \in \mathbb{M}(n, m)$ управляющих параметров тоже не зависит от времени) представляет чисто алгебраическую проблему [16] и сводится к выяснению условий, при которых пара (A, B) вполне управляема (т.е. матрица $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ имеет максимальный ранг). Тем не менее вопрос о глобальной управляемости показателей Ляпунова системы уравнений $\dot{x} = (A_0 + u^* \diamond A)x$ (управление $u \in \mathbb{R}^r$ и матрица $(A_0, A_1, \dots, A_r)$ постоянны) в полной мере пока не исследован (некоторые результаты в этом направлении недавно получены в [17, 18]).

Работа П. Бруновского [19] явилась, пожалуй, одной из первых работ по теории управления асимптотическими характеристиками линейной нестационарной системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)U\big)x, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n. \tag{3.1}$$

В ней доказано, что если функции $A: \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n)$ и $B: \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n,m)$ непрерывно дифференцируемы, периодичны с периодом $T>0$ и пара A, B вполне управляема, то имеет место свойство глобальной управляемости показателей Ляпунова: *любому вещественному вектору* $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$, $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$, *отвечает T-периодическое управление* $U_\mu(t)$ *такое, что вектор показателей Ляпунова* $\lambda\big(A + BU_\mu\big)$ *системы* (3.1), *замкнутой управлением* $U = U_\mu(t)$, *совпадает с* $\mu: \lambda\big(A + BU_\mu\big) = \mu$.

Задача управления показателями Ляпунова системы (3.1) без предположения периодичности представляет существенные трудности в связи с тем, что в общем случае система $\dot{x} = A(t)x$ может быть неприводимой (ляпуновским преобразованием $y = L(t)x$ к системе $\dot{y} = Fy$ с постоянной матрицей F), оказывается далее, что в непериодическом случае она может быть неправильной [15] (см. также [20]). Кроме того, как показал Перрон, при отсутствии периодичности, отсутствует свойство непрерывности[2] показателей Ляпунова $\lambda_i(A)$ системы $\dot{x} = A(t)x$ от $A(\cdot)$ (непрерывности нет даже у почти периодических систем [21]). В такой ситуации наибольший интерес представляет задача о выборе такого допустимого управления, при котором система $(\mathbb{A}, \omega)$ становится правильной (или приводимой) и, следовательно, обладает свойством непрерывности (и локальной управляемости) показателей Ляпунова.

В работах [7–10] изучается вопрос о локальной управляемости показателей Ляпунова так называемых согласованных систем

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)UC^*(t)\big)x, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \tag{3.2}$$

где непрерывные и интегрально ограниченные на $\mathbb{R}$ функции

$$A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n), \quad B\colon \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n,m), \quad C^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{M}(r,n)$$

заданы, а допустимые управления $U = U(t) \in \mathbb{M}(m,r)$ удовлетворяют ограничению $|U(t)| \leqslant 1$. Система (3.2) называется *равномерно согласованной*, если “ большая система”

$$\dot{z} = F(t)z + G(t)v, \quad (t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n^2}, \quad v \in \mathbb{R}^{mr}, \tag{3.3}$$

где $F(t) = A(t) \otimes I - I \otimes A^*(t)$, $G(t) = B(t) \otimes C(t)$, $\otimes$ – символ прямого произведения [22, стр. 235] матриц, равномерно вполне управляема [23]. Показано, что *если система* (3.2) *равномерно согласована, а система* $\dot{x} = A(t)x$ *диагонализируема*[3], *или ее показатели Ляпунова* $\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)$ *непрерывны* (*или, что эквивалентно, устойчивы*) *в точке* $A(\cdot)$ (*в метрике* $\operatorname{vrai\,sup}_t |A(t) - \widehat{A}(t)|$, *см.* [20, стр. 72]), *то найдется такое* $\varepsilon > 0$, *что всякому вектору* $(\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{O}_\varepsilon^n$ *отвечает управление* U_μ *с* $|U_\mu(t)| \leqslant 1$, *обеспечивающее для всех* $i = 1, \ldots, n$ *равенства* $\lambda_i(A + BU_\mu C^*) = \lambda_i(A) + \mu_i$, *где* $\lambda_i(A + BU_\mu C^*)$ – *показатели Ляпунова системы* (3.2) *при* $U = U_\mu(t)$.

[2] Показатели $\lambda_i(A)$ можно рассматривать как функционалы, определенные на пространстве всех систем $\dot{x} = A(t)x$ (с измеримыми и ограниченными на $\mathbb{R}$ матрицами $A(t)$) с метрикой $\operatorname{vrai\,sup}_t |A(t) - \widehat{A}(t)|$.

[3] То есть приводима ляпуновским преобразованием к системе с диагональной матрицей.

Пусть $\Lambda(A)$ – верхний центральный показатель (см. [15, стр. 116], где принято обозначение $\Omega(A)$) линейной системы $\dot{x} = A(t)x$. По определению

$$\Lambda(A) = \inf_{T>0} \overline{\lim_{k\to\infty}} (kT)^{-1} \sum_{i=1}^{k} \ln |X\big(iT, (i-1)T\big)|,$$

где $X(t,s)$ – матрица Коши системы $\dot{x} = A(t)x$. Показатель $\Lambda(A)$ удовлетворяет неравенству $\chi(A) \leqslant \Lambda(A)$, где $\chi(A) = \max\{\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A)\}$, и полунепрерывен сверху (в пространстве линейных систем с топологией равномерной сходимости на прямой $\mathbb{R}$). В [8] показано, что *равномерно согласованная система* (3.2) *обладает свойством локальной управляемости показателя* $\Lambda(A)$ (*т.е. равенство* $\Lambda(A + BU_\delta C^*) = \Lambda(A) + \delta$ *имеет место при каждом* δ, *близком к нулю,и некотором допустимом управлении* $U_\delta(t)$); *кроме того,* $\Lambda(A)$ *обладает свойством достижимости* (*т.е.* $\chi(A + BU_\delta C^*) \geqslant \Lambda(A) - \delta$ *при всех* δ, *близких к нулю*).

Попытки освободиться от условия диагонализируемости или устойчивости показателей системы $\dot{x} = A(t)x$ (или хотя бы ослабить эти условия) предприняты в работах [24, 25]. В [25] показано в частности, что *при* $n = 2$, $C = I$ *и различных показателях Ляпунова* $\lambda_1(A)$, $\lambda_2(A)$, *свойство равномерной согласованности* (*которое при* $C = I$ *эквивалентно свойству равномерной полной управляемости*) *достаточно для локальной управляемости показателей* $\lambda_1(A + BU_\mu)$, $\lambda_2(A + BU_\mu)$.

В работах [11–13] исследуется семейство систем

$$\dot{x} = \big(A(f^t\omega) + B(f^t\omega)UC^*(f^t\omega)\big)x, \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad \omega \in \Omega, \tag{3.4}$$

где (Ω, f^t) – топологическая динамическая система, $|U| \leqslant 1$. Введено свойство равномерной локальной управляемости показателей Ляпунова $\lambda_i(\omega, U)$ системы (3.4) (равенства $\lambda_i(\omega, U_\mu) = \lambda_i(\omega, 0) + \mu_i$ выполнены при некотором допустимом управлении $U_\mu = U_\mu(t,\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и любых достаточно близких к нулю μ_i) и показано, что большинство результатов работ [7–10] распространяется и на системы вида (3.4).

В работах [17] и [18] исследуется задача об управлении показателями Ляпунова наиболее общей системы

$$\dot{x} = A_0(f^t\omega)x + u_1 A_1(f^t\omega)x + \dots + u_r A_r(f^t\omega)x. \tag{3.5}$$

Для таких систем получены некоторые аналоги утверждений работ [7–10] в предположении, что система (3.5) обладает свойством равномерной локальной достижимости (это несколько общée, чем свойство равномерной локальной согласованности, см. § 8) и подробно исследована стационарная система (о чем уже говорилось в начале этого параграфа).

Работы Д.М. Оленчикова [26–30] посвящены задачам управления показателями Ляпунова импульсной системы

$$\dot{x} = \big(A(t) + B(t)UC^*(t)\big)x, \quad U = \sum_{i=-\infty}^{\infty} U_i \delta(t - t_i), \tag{3.6}$$

где $\delta(t)$ – δ-функция, а управляющими параметрами являются матрицы U_i, $|U_i| = 1$, и моменты времени t_i, $0 < t_{i+1} - t_i \leqslant \vartheta$. Наличие δ-функций в коэффициентах приводит к необходимости определения решения системы (3.6). В работах Д.М. Оленчикова это делается методами нестандартного анализа (что близко к определению решения в смысле Курцвейля [31]). Показано, что большинство результатов работ [7–10] распространяется на систему (3.6).

В [32] методика работ [7–10] распространяется на задачи стабилизации решений уравнения теплопроводности с неполной информацией о текущем состоянии температуры. Введены понятия согласованности и характеристического показателя уравнения теплопроводности (аналогичного показателю Ляпунова) и показано, что согласованное уравнение допускает локальную управляемость характеристического показателя.

Пока мало изучен вопрос о глобальной управляемости показателей Ляпунова нестационарных систем и глобальной ляпуновской приводимости линейной системы при отсутствии геометрических ограничений на управления. Помимо уже упомянутой работы Бруновского о глобальной упрвляемости периодической системы, отмечу работу [33], в которой доказано утверждение о глобальной ляпуновской приводимости системы (3.1) при $n = 2$.

Существенным недостатком перечисленных выше исследований является практически полное отсутствие рекомендаций и алгоритмов построения управлений, осуществляющих передвижение показателей Ляпунова в заданные точки. Можно, конечно, анализируя соответствующие доказательства, извлечь некоторую информацию о том, какие управления имеются в виду, но, как правило, если есть одно допустимое управление, осуществляющее заданную цель, то таких управлений много.

Поэтому совершенно естественно (хотя бы на уровне содержательных примеров) попытаться описать класс таких допустимых управлений (разумеется, осуществляющих заданную цель), которые или относительно легко могут быть построены (как в случае систем с постоянными матрицами), или обладающих какими-либо заранее заданными свойствами (например, свойством неупреждаемости, свойством возвращаемости, свойством быстродействия или всеми этими свойствами одновременно). Интересно, что помимо стационарных систем, такие примеры действительно существуют (достаточно вспомнить классическую теорию регулирования). Отметим в связи с этим недавние работы И.В. Гайшуна [34, 35], посвященные системам эквивалентным скалярному уравнению порядка n и ряд дополнений к [34, 35], приведенных в § 7 этой статьи.

Таким образом, с сожалением следует отметить, что теория управления асимптотическими характеристиками (в частности, показателями Ляпунова) пока в бо́льшей степени напоминает классические разделы теории дифференциальных уравнений и сравнительно мало – теорию управления.

4. Динамическая система сдвигов

Здесь приведены два простых примера линейных систем, естественным образом снабженных топологической динамической системой.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = \big(A_0(t) + u_1 A_1(t) + \cdots + u_r A_r(t)\big)x, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad u \in U, \tag{4.1}$$

где измеримые и ограниченные на $\mathbb{R}$ функции $A_i\colon \mathbb{R} \to \mathbb{M}(n)$, удовлетворяют условию: каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что неравенства

$$\max_{|t|\leqslant\varepsilon^{-1}} \int\limits_t^{t+1} |A_i(s+\tau) - A_i(s)|ds < \varepsilon, \quad i = 0, 1, \ldots, r$$

выполнены, как только $|\tau| < \delta$.

Отождествим систему (4.1) с функцией $\mathcal{A}(t) \doteq \bigl(A_0(t), \ldots, A_r(t)\bigr)$ и построим, так называемую, оболочку $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ функции $\mathcal{A}(t)$, где $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ – замыкание множества $\{\mathcal{A}_\tau(\cdot)\colon \tau \in \mathbb{R}\}$ сдвигов $\mathcal{A}_\tau(t) \doteq \mathcal{A}(\tau + t)$ функции $\mathcal{A}(\cdot)$ в метрике [14, стр. 533]

$$\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{-\infty<t<\infty} \max\Bigl\{|t|^{-1}, \int\limits_t^{t+1} |\mathcal{A}(s) - \mathcal{B}(s)|ds\Bigr\} \tag{4.2}$$

(т.е. $\widehat{\mathcal{A}} \in \mathfrak{R}(\mathcal{A})$ в том и только том случае, если найдется последовательность $\{\tau_i\}_{i=0}^\infty$ такая, что $\rho(\widehat{\mathcal{A}}, \mathcal{A}_{\tau_i}) \to 0$ при $i \to \infty$). Можно показать, что пространство $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ компактно (в метрике (4.2)). Далее, определим на $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ поток f^t равенством $f^t\mathcal{A} = \mathcal{A}_t(\cdot)$. Получившаяся таким образом динамическая система $(\mathfrak{R}(\mathcal{A}), f^t)$ называется динамической системой сдвигов. Она обладает всеми свойствами, описанными в §2.

При необходимости динамическую систему сдвигов и соответствующее семейство $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ систем дифференциальных уравнений можно переписать в терминах §2. С этой целью переобозначим $\Omega = \mathfrak{R}(\mathcal{A})$ и введем в рассмотрение функцию $\omega \to \mathbf{A}(\omega)$, которая каждой точке $\omega = \widehat{\mathcal{A}}(\cdot)$ (т.е. системе дифференциальных уравнений вида (4.1)) ставит в соответствие систему дифференциальных уравнений вида (4.1) с матрицей $\mathbf{A}(f^t\omega) \doteq \widehat{\mathcal{A}}(t)$:

$$\dot{x} = \bigl(\widehat{A}_0(t) + u_1\widehat{A}_1(t) + \cdots + u_r\widehat{A}_r(t)\bigr)x, \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n, \quad u \in U. \tag{4.3}$$

Существенность перехода от изучения фиксированной системы (4.1) к изучению семейства систем $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ в задачах управления показателями Ляпунова связана с тем, что показатели Ляпунова являются асимптотическими характеристиками решений системы (4.1) и поэтому определяются, вообще говоря, поведением решений некоторых предельных систем, т.е. систем находящихся в ω-предельном множестве $L_+(\mathcal{A}) \subset \mathfrak{R}(\mathcal{A})$, построенном по исходной системе (4.1). Если при этом множество систем $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ оказывается минимальным (относительно сдвигов), то имеет место равенство $L_+(\mathcal{A}) = \mathfrak{R}(\mathcal{A})$. В этом случае система (4.1) называется рекуррентной (см. §10), а множество $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ оказывается тем наименьшим окружением исходной системы (4.1), изучая которое удается высказать достаточно полные суждения о самой системе.

Рассмотрим еще один часто встречающийся пример. Пусть M – конечномерное компактное гладкое многообразие, f^t – поток на M, заданный автономной системой дифференциальных уравнений $\dot{z} = v(z)$ с гладким (класса C^1) векторным полем $v(x) \in T_xM$ (т.е. $f^t\omega = \varphi(t, \omega)$, где $\varphi(t, \omega)$ – решение системы с начальным условием $\varphi(0, \omega) = \omega$, $\omega \in M$). Тогда пара

(M, f^t) образует динамическую систему. В частности, если $M = T^m$ – тор размерности m, а система на торе имеет вид $\dot{z}_i = \alpha_i$, $i = 1, \ldots, m$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ рационально независимы, то соответствующий поток f^t образует иррациональную обмотку тора и линейная система (2.1) оказывается системой с условно периодическими коэффициентами.

5. Достижимость и метод поворотов

Пусть фиксированы произвольное множество $U \subset \mathbb{R}^r$ $(0 \in U)$ и инвариантное относительно потока f^t множество $E \subset \Omega$.

О п р е д е л е н и е. Множество $\mathcal{U}$ ограниченных на $\mathbb{R} \times E$ функций $(t, \omega) \to u(t, \omega)$ со значениями в U будем называть *множеством допустимых управлений*, если функция $t \to u(t, \omega)$ измерима на $\mathbb{R}$ при каждом $\omega \in E$ (какая либо непрерывность или измеримость функции $\omega \to u(t, \omega)$ не предполагается). Далее, допустимое управление $u(t, \omega)$ будем называть *стационарным* относительно потока f^t, если для всех $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times E$ и некоторой функции $\widehat{u}$: $E \to U$ имеет место равенство $u(t, \omega) = \widehat{u}(f^t \omega)$.

Каждому допустимому управлению $u(t, \omega)$ поставим в соответствие матрицу Коши $X_u(t, s, \omega)$ системы (2.1) при $u = u(t, \omega)$.

Лемма 1. (см. [36]) *Пусть фиксированы компактное инвариантное множество E в Ω и допустимое управление $u(t, \omega)$. Если управление $u(t, \omega)$ интегрально непрерывно на E равномерно относительно* t *на каждом отрезке (т.е. для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ найдется $\delta > 0$, что*

$$\max_{|t| \leqslant N} \int_t^{t+1} |u(\tau, \omega) - u(\tau, \omega_0)| d\tau \leqslant \delta, \tag{5.1}$$

для всех $\omega, \omega_0 \in E$, удовлетворяющих неравенству $\rho(\omega, \omega_0) < \delta$, где ρ – метрика в Ω, то функция $\omega \to X_u(t, s, \omega)$ непрерывна на E равномерно относительно (t, s) на любом компакте в $\mathbb{R}^2$. Далее, если управление стационарно относительно потока f^t, то

$$X_u(t + \tau, s + \tau, \omega) = X_u(t, s, f^\tau \omega), \text{ для всех } \tau \in \mathbb{R} \text{ и всех } (t, s) \in \mathbb{R}^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть N – фиксированное натуральное число, $(t, s) \in \Pi \doteq [-N, N]^2$, $u(t, \omega)$ – допустимое управление, удовлетворяющее условиям леммы. Тогда из равенства

$$X_u(t, s, \omega) - X_u(t, s, \omega_0) =$$

$$= \int_s^t \big(\mathfrak{u}^*(\tau, \omega) \diamond \mathcal{A}(f^\tau \omega) X_u(\tau, s, \omega) - \mathfrak{u}^*(\tau, \omega_0) \diamond \mathcal{A}(f^\tau \omega_0) X_u(\tau, s, \omega_0)\big) d\tau,$$

где $\mathfrak{u} = \mathrm{col}(1, u)$, $\mathcal{A} = (A_0, A_1, \ldots, A_r)$, $X_u(\tau, s, \omega_0)$ – матрица Коши системы $(\mathbb{A}, \omega_0)$ при $u = u(t, \omega_0)$, имеем:

$$v(t, s, \omega) \doteq |X_u(t, s, \omega) - X_u(t, s, \omega_0)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{-N}^{t} |\mathfrak{u}^*(\tau,\omega){\diamond}\mathcal{A}(f^\tau\omega)X_u(\tau,s,\omega) - \mathfrak{u}^*(\tau,\omega_0){\diamond}\mathcal{A}(f^\tau\omega_0)X_u(\tau,s,\omega_0)|d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \alpha \int\limits_{-N}^{t} v(\tau,s,\omega)d\tau + \delta, \quad \alpha = \sup_t\{\|\mathcal{A}(t,\omega)\| \cdot |\mathfrak{u}(t,\omega)|_1 \colon |t| \leqslant N\},$$

$$\delta = \int\limits_{-N}^{N} \big(\beta|\mathcal{A}(f^\tau\omega) - \mathcal{A}(f^\tau\omega_0)| + \gamma|\mathfrak{u}^*(\tau,\omega) - \mathfrak{u}^*(\tau,\omega_0)|_1\big)d\tau,$$

$$\beta = \sup_{(t,s)}\{|X_u(t,s,\omega_0)| \cdot |\mathfrak{u}(t,\omega_0)| \colon (t,s) \in \Pi\},$$

$$\gamma = \sup_{(t,s)}\{\|\mathcal{A}(f^t\omega)\| \cdot |X_u(t,s,\omega_0)| \colon (t,s) \in \Pi\}.$$

Поэтому если ω близкó к ω_0, то δ близкó к нулю. Применив к неравенству

$$v(t,s,\omega) \leqslant \alpha \int\limits_{-N}^{t} v(\tau,s,\omega)d\tau + \delta, \quad -N \leqslant t \leqslant N$$

лемму Гронуолла–Беллмана, получаем первое утверждение леммы.

Для доказательства второго утверждения, в тождестве

$$\dot{X}_u(t,s,\omega) \equiv \big(A_0(f^t\omega) + u^*(f^t\omega){\diamond}A(f^t\omega)\big)X_u(t,s,\omega),$$

проведем замену $t \to t+\tau$, $s \to s+\tau$. Легко убедиться, что функция $t \to Y(t,s,\omega) \doteq X_u(t+\tau,s+\tau,\omega)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{Y} = \big(A_0\big(f^t\omega_1\big) + u^*(f^t\omega_1){\diamond}A(f^t\omega_1)\big)Y, \quad \omega_1 = f^\tau\omega,$$

и условию $Y|_{t=s} = I$. Поэтому $Y(t,s,\omega)$ – матрица Коши системы (2.1) при $u = u(f^t\omega_1)$. Лемма доказана.

Для матричного уравнения

$$\dot{X} = \big(A_0(f^t\omega) + u^*{\diamond}A(f^t\omega)\big)X, \quad (t,\omega,X) \in \mathbb{R}\times\Omega\times M(n), \tag{5.2}$$

отвечающего системе $(\mathbb{A},\omega)$, введем в рассмотрение *множество достижимости* $\mathfrak{D}_\vartheta(\omega)$ из точки $X(0) = I$, где I – единичная матрица в $\mathbb{M}(n)$ (при необходимости будем подчеркивать принадлежность множества $\mathfrak{D}_\vartheta(\omega)$ системе $(\mathbb{A},\omega)$ с помощью записи $\mathfrak{D}_\vartheta(\mathbb{A},\omega)$). По определению

$$\mathfrak{D}_\vartheta(\omega) = \bigcup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} X_u(\vartheta,0,\omega), \quad (\vartheta,\omega) \in \mathbb{R}_+\times\Omega. \tag{5.3}$$

Лемма 2. (см. [17]) *Справедливы следующие утверждения:*

а) $\mathfrak{D}_\vartheta(\omega) \subset \mathbb{G}_+(n)$ *и* $\mathfrak{D}_\vartheta(\omega) = \mathbb{D}_\vartheta(\omega) + X_0(\vartheta, 0, \omega)$*, где* $\mathbb{D}_\vartheta(\omega)$ *– множество достижимости матричного уравнения*

$$\dot{Y} = \big(A_0(f^t\omega) + u^*\diamond A(f^t\omega)\big)Y + \big(u^*\diamond A(f^t\omega)\big)X_0(t, 0, \omega), \qquad (5.4)$$

из начальной точки $Y(0) = 0$ *за время* ϑ *под действием допустимых управлений* $u(\cdot) \in \mathcal{U}$ *(для каждого допустимого управления* $u = u(t, \omega)$ *имеет место равенство* $X_u(\vartheta, 0, \omega) = Y_u(\vartheta, \omega) + X_0(\vartheta, 0, \omega)$*, где* $Y_u(t, \omega)$ *– решение системы* (5.4) *при* $u = u(t, \omega)$ *и начальном условии* $Y(0)=0$*),*

б) если множество U *компактно и выпукло, а множество* Ω *компактно, то функция* $(\vartheta, \omega) \to \mathfrak{D}_\vartheta(\omega)$ *(а, следовательно, и функция* $(\vartheta, \omega) \to \mathbb{D}_\vartheta(\omega)$*) имеет компактные образы в* $\mathbb{M}(n)$ *и непрерывна в метрике Хаусдорфа на* $\mathbb{R}_+ \times \Omega$*.*

Пусть заданы система $(\mathbb{A}, \omega)$ и два множества $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}^0 \subset \mathbb{G}_+(n)$ (например, $\mathcal{H}_0 = \{\exp\Lambda\colon |\Lambda| \leqslant \varepsilon\}$, $\mathcal{H}^0 = \{I\}$, где $\varepsilon > 0$, I – единичная матрица). Образуем множество

$$\mathcal{H} \doteq \{(H_0, H^0)\colon\; H_0 \in \mathcal{H}_0,\; H^0 \in \mathcal{H}^0\} \subset \mathbb{G}_+(n) \times \mathbb{G}_+(n)$$

и каждой точке $H \in \mathcal{H}$ поставим в соответствие функцию $\vartheta \to G_H(\vartheta, \omega) \doteq H_0 X_0(\vartheta, 0, \omega) H^0$ со значениями в пространстве $\mathbb{G}_+(n)$ и положительную полутраекторию $\operatorname{orb}_+ G_H(\omega) \doteq \{G \subset \mathbb{G}_+(n)\colon G = G_H(\vartheta, \omega),\ \vartheta \geqslant 0\}$. Объединение по $H \in \mathcal{H}$ всех полутраекторий $G_H(\omega)$ обозначим $\mathcal{G}(\omega)$. Таким образом,

$$\mathcal{G}(\omega) \doteq \bigcup_{H \in \mathcal{H}} \operatorname{orb}_+ G_H(\omega) \subset \mathbb{G}_+(n). \qquad (5.5)$$

В конкретных ситуациях важен следующий частный случай множества $\mathcal{H}$. Пусть задана непрерывная функция

$$H \doteq (H_0, H^0)\colon \mathbb{R}_+ \times E \to \mathbb{G}_+(n) \times \mathbb{G}_+(n).$$

Построим множество $\mathcal{H}(\omega) = \operatorname{orb}_+ H(\omega) \doteq \{\big(H_0(\vartheta, \omega), H^0(\vartheta, \omega)\big)\colon\ \vartheta \geqslant 0\}$. Тогда определены функция $\vartheta \to G(\vartheta, \omega) \doteq H_0(\vartheta, \omega) X_0(\vartheta, 0, \omega) H^0(\vartheta, \omega)$ и положительная полутраектория

$$\mathcal{G}(\omega) \doteq \{G \subset \mathbb{G}_+(n)\colon G = G(\vartheta, \omega),\ \vartheta \geqslant 0\}. \qquad (5.6)$$

О п р е д е л е н и е. Множество $\mathcal{G}(\omega)$ (5.5) (ω фиксировано) называется *достижимым* (по траекториям системы $(\mathbb{A}, \omega)$), если найдутся число $\vartheta^* > 0$ и функция $\vartheta\colon \mathcal{H} \to (0, \vartheta^*]$ такие, что для любой матрицы $H \in \mathcal{H}$ имеет место включение $G_H(\vartheta(H), \omega) \in \mathfrak{D}_{\vartheta(H)}(\omega)$.

Далее, если для заданного компактного инвариантного множества E в Ω найдутся число $\vartheta^* > 0$ и функция $\vartheta:\ E \times \mathcal{H} \to (0, \vartheta^*]$ такие, что для любой $H \in \mathcal{H}$ имеет место включение $G_H(\vartheta(\omega, H), \omega) \in \mathfrak{D}_{\vartheta(\omega, H)}(\omega)$, то множество $\mathcal{G}(\omega)$ называется *равномерно достижимым на* E.

Если же множество $\mathcal{G}(\omega)$ задано равенством (5.6), то *достижимость* множества $\mathcal{G}(\omega)$ означает, что включение $G(\vartheta, \omega) \in \mathfrak{D}_\vartheta(\omega)$ имеет место при некотором $\vartheta > 0$, а *равномерная достижимость* на E означает существование числа $\vartheta^* > 0$ и функции $\vartheta:\ E \to (0, \vartheta^*]$ таких, что $G(\vartheta(\omega), \omega) \in \mathfrak{D}_{\vartheta(\omega)}(\omega)$.

Далее, систему $(\mathbb{A},\omega)$ (при фиксированном ω) будем называть *локально достижимой*, если найдутся $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$, что $\mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathbb{D}_\vartheta(\omega)$ и *равномерно локально достижимой* (на E), если включение $\mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathbb{D}_\vartheta(\omega)$ выполнено для всех $\omega \in E$ и некоторых (не зависящих от ω) $\varepsilon > 0$ и $\vartheta > 0$.

З а м е ч а н и е. Мы будем говорить также, что система $(\mathbb{A},\omega)$ (при фиксированном ω) $\mathcal{H}$-достижима, если множество $\mathcal{G}(\omega)$ достижимо по траекториям системы $(\mathbb{A},\omega)$; система $(\mathbb{A},\omega)$ $\mathcal{H}$-равномерно достижима на E, если множество $\mathcal{G}(\omega)$ равномерно достижимо. Отметим, кроме того, что в определении 5 предполагается строгая положительность функции $\vartheta(\omega)$ для всех $\omega \in E$ даже в том случае, если $H_0H^0 = I$ (т.е. когда $\vartheta(\omega)$ не есть время быстродействия на множество $\mathcal{G}(\omega)$).

Формулируемое ниже очевидное утверждение, устанавливает связь определения 5 с методом поворотов В.М. Миллионщикова [37, 38, 20].

Лемма 3. *Множество $\mathcal{G}(\omega)$, определенное равенством* (5.5)*, достижимо по траекториям системы $(\mathbb{A},\omega)$ в том и только том случае, если найдутся число $\vartheta^* > 0$, функция $\vartheta\colon \mathcal{H} \to [0,\vartheta^*]$ и допустимое управление $u(t,H)$, $t \in [0,\vartheta(H)]$ такие, что имеет место равенство*

$$X_u(\vartheta,0,\omega) = H_0X_0(\vartheta,0,\omega)H^0, \quad \vartheta = \vartheta(H). \tag{5.7}$$

Множество $\mathcal{G}(\omega)$, определенное равенством (5.5)*, равномерно достижимо на E по траекториям системы $(\mathbb{A},\omega)$ в том и только том случае, если найдутся число $\vartheta^* > 0$, функция $\vartheta\colon E\times\mathcal{H} \to (0,\vartheta^*]$ и допустимое управление $u(t,\omega,H)$, $t \in [0,\vartheta(\omega,H)]$ такие, что при $\vartheta = \vartheta(\omega,H)$ имеет место равенство* (5.7).

Далее, если множество $\mathcal{G}(\omega)$ определено равенством (5.6)*, то оно равномерно достижимо на E по траекториям системы $(\mathbb{A},\omega)$ в том и только том случае, если найдутся число $\vartheta^* > 0$, функция $\vartheta\colon E \to (0,\vartheta^*]$ и допустимое управление $u(t,\omega)$, $t \in [0,\vartheta(\omega)]$ такие, что для всех $\omega \in E$ имеет место равенство $X_u(\vartheta(\omega),0,\omega) = G(\vartheta(\omega),\omega)$.*

Теорема 1. *Пусть E минимально, а множество $\mathcal{H}$ компактно. Тогда множество $\mathcal{G}(\omega)$, определенное равенством* (5.5)*, равномерно достижимо на E по траекториям системы $(\mathbb{A},\omega)$ в том и только том случае, если оно достижимо.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1 работы [17] или теоремы 5 работы [18].

6. Примитивное управление и ляпуновская приводимость

Пусть фиксированы компактное инвариантное множество E в Ω и *ляпуновское преобразование* $L\colon \mathbb{R}\times E \to \mathbb{M}(n)$. Это означает, что

$$|L(t,\omega)| + |L^{-1}(t,\omega)| + \left|\frac{dL(t,\omega)}{dt}\right| < \infty, \quad (t,\omega) \in \mathbb{R}\times E.$$

Тогда для каждого допустимого управления $u\colon \mathbb{R}\times E \to U$ система

$$\dot{x} = \bigl(A_0(f^t\omega) + u^*(t,\omega)\diamond A(f^t\omega)\bigr)\,x \tag{6.1}$$

приводима с помощью преобразования $x = L(t,\omega)y$ к системе

$$\dot y = \big(F_0(t,\omega) + u^*(t,\omega)\diamond F(t,\omega)\big)y, \tag{6.2}$$

где $F_0(t,\omega) = L^{-1}(t,\omega)A_0(f^t\omega)L(t,\omega) - L^{-1}(t,\omega)\dot L(t,\omega)$,

$$F(t,\omega) = \big(F_1(t,\omega),\ldots,F_r(t,\omega)\big), \quad F_i(t,\omega) = L^{-1}(t,\omega)A_i(f^t\omega)L(t,\omega). \tag{6.3}$$

Непрерывная функция $L\colon E \to \mathbb{M}(n)$ называется *стационарным* (относительно потока f^t) ляпуновским преобразованием, если $\min_E \det L(\omega) > 0$, производная $\dot L(\omega) \doteq \lim_{t\to 0} t^{-1}\big(L(f^t\omega) - L(\omega)\big)$ существует при всех $\omega \in E$ и $\sup_E |\dot L(\omega)| < \infty$. Если теперь выбрано стационарное допустимое управление $u(f^t\omega)$, то система (6.1) задается матрицей $A_0(\omega) + u^*(\omega)\diamond A(\omega)$ и преобразование $x = L(f^t\omega)y$ приводит (6.1) к системе

$$\dot y = \big(F_0(f^t\omega) + u^*(f^t\omega)\diamond F(f^t\omega)\big)y,$$

где $F_0(\omega)$ и $F_i(\omega)$ определяются аналогично (6.3).

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{D}_\vartheta(\mathbb{A},\omega)$ – множество достижимости системы $(\mathbb{A},\omega)$, $x = L(t,\omega)y$ – ляпуновское преобразование, приводящее систему $(\mathbb{A},\omega)$ к системе $(\mathbb{F},\omega)$. Тогда $\mathfrak{D}_\vartheta(\mathbb{A},\omega) = L(\vartheta,\omega)\mathfrak{D}_\vartheta(\mathbb{F},\omega)L^{-1}(0,\omega)$, где $\mathfrak{D}_\vartheta(\mathbb{F},\omega)$ – множество достижимости системы уравнений $(\mathbb{F},\omega)$.*

Доказательство этого утверждения следует из очевидного равенства $X_u(t,s,\omega) = L(t,\omega)Y_u(t,s,\omega)L^{-1}(s,\omega)$, где $Y_u(t,s,\omega)$ – матрица Коши системы (6.2) при $u = u(t,\omega)$.

Для каждого фиксированного $\omega \in E$ построим в пространстве $\mathbb{M}(n)$ множество $\mathcal{F}(\omega) \doteq A_0(\omega) + \bigcup_{u\in U} u^*\diamond A(\omega)$; в частности, если $U = \mathbb{R}^r$, то $\mathcal{F}(\omega) = A_0(\omega) + \mathcal{L}(\omega)$ – линейное многообразие, где $\mathcal{L} \doteq \operatorname{lin}\{A_1,\ldots,A_r\}$ – линейное подпространство в $\mathbb{M}(n)$, образованное матрицами $A_1,\ldots,A_r$.

Таким образом, для всякой функции $\omega \to P(\omega) \in \bigcup_{u\in U} u^*\diamond A(\omega)$, удовлетворяющей основному условию, найдется функция $\omega \to u(\omega) \in U$, порождающая допустимое управление $t \to u(f^t\omega)$ (будем называть его *примитивным*) для системы (6.1). Система (6.1), отвечающая этому примитивному управлению, запишется в виде

$$\dot y = \big(A_0(f^t\omega) + P(f^t\omega)\big)y. \tag{6.4}$$

Примитивное управление является стационарным (относительно потока f^t) и неупреждающим (т.е. при фиксированном ω построение $u(f^t\omega)$ в точке $t=0$ не предполагает информации о состояниях системы $(\mathbb{A},\omega)$ при $t>0$).

Пример (классическая задача теории регулирования). Рассмотрим систему (6.1) в предположении, что $r = n$,

$$A_0(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \ldots & 1 \\ a_1(\omega) & a_2(\omega) & \ldots & \ldots & a_n(\omega) \end{pmatrix}, \tag{6.5}$$

все элементы матрицы A_i равны нулю за исключением одного элемента, равного единице и стоящего на пересечении последней строки и i-го столбца, $i = 1, \dots, n$. Пусть далее, множество $U = \mathbb{R}^n$. Задача состоит в построении такого примитивного управления $u(\omega) = \big(u_1(\omega), \dots, u_n(\omega)\big)$, что отвечающая ему система (6.4) имеет матрицу

$$F_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \dots & \mu_n \end{pmatrix}$$

с заранее заданными вещественными $\mu_1, \dots, \mu_n$. Решение этой задачи очевидно: многообразие $A_0(\omega) + \mathcal{L}(\omega)$ состоит из матриц вида (6.5) с произвольными элементами $a_1(\omega), \dots, a_n(\omega)$, поэтому $F_\mu \in A_0(\omega) + \mathcal{L}(\omega)$ для любых $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. Более общая ситуация рассмотрена в § 7.

7. Дифференциальная цепочка

Систему уравнений

$$\dot{x} = A_0(f^t\omega)x + b_0(f^t\omega)v, \quad (t, \omega, x) \in \mathbb{R} \times E \times \mathbb{R}^n, \quad v \in \mathbb{R}, \tag{7.1}$$

где E – компактное инвариантное множество в Ω,

$$A_0 = \begin{pmatrix} a^0_{11}(\omega) & \beta_2(\omega) & 0 & \dots & 0 \\ a^0_{21}(\omega) & a^0_{22}(\omega) & \beta_3(\omega) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^0_{n-1,1}(\omega) & a^0_{n-1,2}(\omega) & \dots & \dots & \beta_n(\omega) \\ \eta_1(\omega) & \eta_2(\omega) & \dots & \dots & \eta_n(\omega) \end{pmatrix}, \quad b_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \beta_0(\omega) \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

функции A_0, b_0 непрерывны на E и для всех $(\omega, i) \in E \times \{0, 2, \dots, n\}$ выполнены неравенства $\beta_i(\omega) > 0$, будем называть дифференциальной цепочкой. Это название связано с тем, что система (7.1) эквивалентна неоднородному квазидифференциальному уравнению (см. [39–42])

$$\big(\ell_n(f^t\omega)z\big)^{\cdot} = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(f^t\omega)\ell_i(f^t\omega)z + \beta_0(f^t\omega)v, \tag{7.3}$$

где $(\cdot)^{\cdot} = d/dt$, а линейные дифференциальные операторы ℓ_k определены равенствами

$$\ell_1 z = z,$$

$$\ell_k(f^t\omega)z = \beta_k^{-1}(f^t\omega)\Big(\big(\ell_{k-1}(f^t\omega)z\big)^{\cdot} - \sum_{m=1}^{k-1} a^0_{k-1,m}(f^t\omega)\ell_m(f^t\omega)z\Big), \tag{7.4}$$

$k = 2, \dots, n$. Эта эквивалентность устанавливается равенствами

$$x_1 = z, \quad x_2 = \ell_2(f^t\omega)z, \quad \dots \quad, x_n = \ell_n(f^t\omega)z. \tag{7.5}$$

Соответствующее однородное уравнение однозначно определяется матрицей $A_0(\omega)$, которую будем называть *порождающей.* В частности, матрица

$$\mathcal{F}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \dots & \mu_n \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

является порождающей для уравнения

$$(\ell_n z)^{\cdot} = \mu_1(\ell_1 z) + \mu_2(\ell_1 z)^{\cdot} + \dots + \mu_n(\ell_{n-1} z)^{\cdot}\,, \tag{7.7}$$

которое эквивалентно уравнению

$$z^{(n)} = \mu_1 z + \mu_2 \dot{z} + \dots + \mu_n z^{(n-1)}\,. \tag{7.8}$$

Допустим, что процесс управления системой (7.1) осуществляется с помощью линейной обратной связи вида

$$v = \beta_0^{-1}(f^t\omega)\big(u_1x_1 + \dots + u_nx_n\big),$$

где вектор $u = \operatorname{col}(u_1, \dots, u_n)$ интерпретируется как новый управляющий вектор. Тогда замкнутую систему можно записать в виде (2.1):

$$\dot{x} = \Big(A_0(f^t\omega) + \sum_{i=1}^{n} u_iA_i\Big)x, \quad (t, \omega, x) \in \mathbb{R} \times E \times \mathbb{R}^n, \tag{7.9}$$

где все элементы матрицы A_i равны нулю за исключением одного элемента, равного единице и стоящего на пересечении последней строки и i-го столбца.

В этом параграфе обозначение матрицы Коши $\mathcal{X}_u(t, s, \omega)$ относится к системе (7.9) при некотором допустимом управлении $u = u(f^t\omega)$. К допустимым управлениям будем относить всевозможные непрерывные функции $u\colon\ E \to \mathbb{R}^n$ (геометрические ограничения на управления отсутствуют). Как и раньше, E – компактное инвариантное (не обязательно минимальное) множество в пространстве Ω.

Лемма 5. *Пусть фиксирован вектор* $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$. *Построим для системы* (7.9) *управление* $u^*(f^t\omega, \mu) = \operatorname{col}\big(u_1(f^t\omega, \mu), \dots, u_n(f^t\omega, \mu)\big)$,

$$u_k(\omega, \mu) = -\eta_k(\omega) + \mu_k\beta_k(\omega) + \xi_k(\omega, \mu), \quad k = 1, \dots, n, \tag{7.10}$$

$\beta_1 = 1$, $\xi_k(\omega, \mu) = \mu_{k+1}a^0_{k,k}(\omega) + \dots + \mu_n a^0_{n-1,k}(\omega)$ *при* $k = 1, \dots, n-1$, $\xi_n = 0$. *Оказывается, что при* $u = u^*(f^t\omega, \mu)$ *имеет место равенство*

$$\mathcal{X}_u(t, s, \omega) = \mathcal{S}^{-1}(f^t\omega)\big(\exp \mathcal{F}_\mu(t-s)\big)\mathcal{S}(f^s\omega), \tag{7.11}$$

где матрица $\mathcal{F}_\mu$ *определена равенством* (7.6), *а* $\mathcal{S}(\omega)$ – *равенством*

$$\mathcal{S}(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^0_{11}(\omega) & \beta_2(\omega) & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a^0_{n-2,1}(\omega) & \dots & \dots & \beta_{n-1}(\omega) & 0 \\ a^0_{n-1,1}(\omega) & \dots & \dots & a^0_{n-1,n-1}(\omega) & \beta_n(\omega) \end{pmatrix}. \tag{7.12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку система (7.9) и уравнение (7.3) эквивалентны, то первоначально построим управление $v(f^t\omega,\mu,z)$ для уравнения (7.3). Пусть это управление имеет вид

$$v(\omega,\mu,z)=\frac{1}{\beta_0(\omega)}\Big(\mu_1(\ell_1 z)+\sum_{i=2}^{n}\mu_i(\ell_{i-1}z)^{\boldsymbol{\cdot}}-\sum_{i=1}^{n}\eta_i(\omega)(\ell_i z)\Big), \qquad (7.13)$$

где операторы $\ell_1,\dots,\ell_n$ определены равенствами (7.4). Тогда, как легко видеть, уравнение (7.3), замкнутое управлением (7.13), запишется в виде (7.7). Заменяя теперь $(\ell_{i-1}z)^{\boldsymbol{\cdot}}$ в (7.13), с учетом (7.4) на

$$\beta_i(\omega)(\ell_i z)+a^0_{i-1,1}(\omega)(\ell_1 z)+\dots+a^0_{i-1,i-1}(\omega)(\ell_{i-1}z)$$

и затем $\ell_i z$, с учетом (7.5) на x_i, получим управление для системы (7.1). Перегруппировав это управление по координатам x_i, построим управления $u_i(\omega)$ для (7.9). Можно проверить, что $u_i(\omega)$ определены равенствами (7.10). Получившаяся таким образом замкнутая система

$$\dot x=\mathcal{A}_0(f^t\omega,\mu)x,\quad (t,\omega,x)\in\mathbb{R}\times E\times\mathbb{R}^n, \qquad (7.14)$$

имеет структуру дифференциальной цепочки (т.е. $\mathcal{A}_0(\omega,\mu)$ имеет структуру порождающей матрицы, причем $\mathcal{A}_0(\omega,\mu)$ отличается от $A_0(\omega)$ только последней строкой). Следовательно, система (7.14) эквивалентна некоторому квазидифференциальному уравнению вида (7.3). Это уравнение (см. (7.3), (7.4)) имеет вид

$$\big(\ell_n(f^t\omega)z\big)^{\boldsymbol{\cdot}}=\sum_{k=1}^{n}\big(\mu_k\beta_k(f^t\omega)+\xi_k(f^t\omega)\big)\big(\ell_k(f^t\omega)z\big), \qquad (7.15)$$

где $\beta_1=1$, $\xi_n=0$. Уравнения (7.7) и (7.15) имеют различные порождающие матрицы, но, как мы только что убедились, пространства решений этих уравнений совпадают. Отсюда не следует, что совпадают пространства решений уравнения (7.14) и уравнения $\dot x=\mathcal{F}_\mu x$, где матрица $\mathcal{F}_\mu$ определена равенством (7.6).

Пусть $z(t)$ – решение уравнения (7.7), тогда решение $x(t)$ системы (7.14), отвечающее $z(t)$, имеет в силу (7.4) координаты

$$x_1(t)=z(t),\quad x_k(t)=\beta_k^{-1}(f^t\omega)\big(z^{(k-1)}(t)-a^0_{k-1,1}(f^t\omega)x_1(t)-\\ \dots-a^0_{k-1,k-1}(f^t\omega)x_{k-1}(t)\big),\quad k=2,\dots,n. \qquad (7.16)$$

Перепишем (7.16) в векторной записи $x(t)=\mathfrak{b}^{-1}(f^t\omega)\big(z_0(t)-\mathfrak{a}(f^t\omega)x(t)\big)$, где $z_0=\mathrm{col}\big(z,\dot z,\dots,z^{(n-1)}\big)$,

$$\mathfrak{b}(\omega)=\mathrm{diag}\big(1,\beta_2(\omega),\dots,\beta_n(\omega)\big),\quad \mathfrak{a}(\omega)=\mathcal{S}(\omega)-\mathfrak{b}(\omega).$$

Таким образом, для некоторой матрицы $\mathcal{C}$ выполнено равенство

$$\mathcal{X}_u(t,s,\omega)=\mathfrak{b}^{-1}(f^t\omega)\left(\big(\exp\mathcal{F}_\mu(t-s)\big)\mathcal{C}-\mathfrak{a}(f^t\omega)\mathcal{X}_u(t,s,\omega)\right),$$

что приводит к равенству $\mathcal{S}(f^t\omega)\mathcal{X}_u(t,s,\omega)=\big(\exp\mathcal{F}_\mu(t-s)\big)\mathcal{C}$. Поэтому $\mathcal{C}=\mathcal{S}(f^s\omega)$ и утверждение (7.11) доказано.

Следствие 1. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *для любого* $\mu \in \mathbb{R}^n$ *и всех* $\vartheta \geqslant 0$ *справедливо включение*

$$\mathcal{S}^{-1}(f^\vartheta\omega)\big(\exp \mathcal{F}_\mu \vartheta\big)\mathcal{S}(\omega) \subset \mathfrak{D}_\vartheta(\omega),$$

где $\mathfrak{D}_\vartheta(\omega)$ *– множество достижимости матричного уравнения, отвечающего системе* (7.9)*;*

2) *система* (7.9) $\mathcal{H}$*-равномерно достижима на* E, *где*

$$\mathcal{H} = \{\mathcal{S}^{-1}(f^1\omega)\big(\exp \mathcal{F}_\mu\big): \ \mu \in \mathbb{R}^n\} \times \{\mathcal{X}_0(0,1,\omega)\mathcal{S}(\omega)\},$$

$\mathcal{X}_0(t,s,\omega)$ *– матрица Коши системы* (7.9) *при* $u = 0$.

З а м е ч а н и е. Управление (7.10) стационарно относительно потока f^t (поэтому оно сохраняет свойство возвращаемости) и обладает следующим свойством неупреждаемости: пусть фиксировано $\omega \in E$, для построения $u_i(\omega)$ в точке ω достаточно знать значения матрицы $A_0(\omega)$ и вектора $b_0(\omega)$ только в точке ω.

Дополнительно к высказанным ранее условиям предположим, что функция $\omega \to \dot{\mathcal{S}}(\omega)$ непрерывна на E (здесь $\dot{\mathcal{S}}(\omega) = \lim\limits_{t\to 0} t^{-1}\big(\mathcal{S}(f^t\omega) - \mathcal{S}(\omega)\big)$ – производная $\mathcal{S}(f^t\omega)$ вдоль потока f^t в точке $t = 0$). Тогда в силу компактности E имеем:

$$\max_{\omega\in E}\{|\mathcal{S}(\omega)| + |\mathcal{S}^{-1}(\omega)| + |\dot{\mathcal{S}}(\omega)|\} < \infty.$$

Таким образом, функция $t \to \mathcal{S}(f^t\omega)$ является преобразованием Ляпунова (причем стационарным относительно потока). Поэтому из равенства (7.11) следует утверждение:

для каждого $\mu \in \mathbb{R}^n$ *ляпуновское преобразование* $z = \mathcal{S}(f^t\omega)x$ *(не зависящее от* μ*) приводит систему* (7.14) *к системе* $\dot z = \mathcal{F}_\mu z$ *с постоянной матрицей, определенной равенством* (7.6).

Рассмотрим произвольную линейную систему с одним входом

$$\dot y = A(f^t\omega)y + b(f^t\omega)v, \quad (t,y,\omega) \in \mathbb{R}^{1+n} \times E, \quad v \in \mathbb{R}, \tag{7.17}$$

где E – инвариантное компактное множество в Ω. Выпишем условия, при которых система (7.17) приводится к дифференциальной цепочке (7.1) с помощью стационарного относительно потока ляпуновского преобразования $y = Q(f^t\omega)x$.

Теорема 2. *Предположим, что существуют непрерывная на* E *функция* $\beta_0(\omega) > 0$ *и* $n \times (n-1)$*–матрица*

$$\mathfrak{a}_0(\omega) = \begin{pmatrix} \beta_2(\omega) & 0 & \dots & 0 \\ a^0_{22}(\omega) & \beta_3(\omega) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^0_{n-1,2}(\omega) & \dots & a^0_{n-1,n-1}(\omega) & \beta_n(\omega) \\ \eta_2(\omega) & \dots & \dots & \eta_n(\omega) \end{pmatrix} \tag{7.18}$$

(отличающаяся от матрицы $A_0(\omega)$ *в* (7.2) *отсутствием первого столбца) такие, что:*

1) $\beta_i(\omega) > 0$ *при всех* $\omega \in E$, $i = 2, \dots, n$;

2) *векторы-столбцы* $q_1(\omega), \dots, q_n(\omega)$, *где* $q_n(\omega) = \beta_0^{-1}(\omega) b(\omega)$,

$$\begin{aligned} q_{k-1}(\omega) = \beta_k^{-1}(\omega)\big(A(\omega)q_k(\omega) - \dot q_k(\omega) - a^0_{k,k}(\omega)q_k(\omega) - \cdots \\ \cdots - a^0_{n-1,k}(\omega)q_{n-1}(\omega) - \eta_k(\omega)q_n(\omega)\big), \quad k = n, \dots, 2, \end{aligned} \tag{7.19}$$

непрерывно дифференцируемы (вдоль f^t *при* $t = 0$) *на* E *и линейно независимы при каждом фиксированном* $\omega \in E$.

Тогда при $Q(\omega) = \big(q_1(\omega), \dots, q_n(\omega)\big)$ *система* (7.17) *приводима ляпуновским преобразованием* $x = Q^{-1}(f^t\omega)y$ *к дифференциальной цепочке* (7.1), *где первый столбец* $a_1(\omega) \doteq \mathrm{col}\big(a_{11}(\omega), \dots, a_{n-1,1}(\omega), \eta_1(\omega)\big)$ *матрицы* $A_0(\omega)$ *определяется равенством* $a_1(\omega) = Q^{-1}(\omega)\big(\dot q_1(\omega) + A(\omega)q_1(\omega)\big)$.

Действительно, ляпуновское преобразование $y = Q(f^t\omega)x$ приводит систему (7.17) к системе (7.1), в том и только том случае, если

$$Q(\omega)b_0 = b(\omega), \quad Q(\omega)A_0(\omega) = A(\omega)Q(\omega) - \dot Q(\omega).$$

Эти условия однозначно определяют $Q(\omega)$ и в силу специфики $A_0(\omega)$, столбцы матрицы $Q(\omega)$ находятся последовательно из равенств (7.19).

З а м е ч а н и е. Напомним [36, стр. 106], что система (7.17) называется *дифференциально управляемой на* E, если матрица

$$W(\varepsilon, \omega) = \int\limits_0^\varepsilon X_0(0, t, \omega) b(f^t\omega) b^*(f^t\omega) X_0^*(0, t, \omega)dt,$$

где $X_0(t, s, \omega)$ – матрица Коши системы $\dot x = A(f^t\omega)x$, определенно положительна для всех $\varepsilon > 0$ и $\omega \in E$. Несложно проверить, используя рассуждения Н.Н. Красовского [43, теорема 20.1], что условие линейной независимости векторов (7.19) является достаточным условием дифференциальной управляемости системы (7.17).

Из (7.19) следует, что при определенных условиях система

$$\dot y = A(f^t\omega)y + b(f^t\omega)v, \quad (t, y, \omega) \in \mathbb{R}^{1+n} \times E, \quad v \in \mathbb{R}, \tag{7.20}$$

приводима к дифференциальной цепочке с помощью ортогонального преобразования $y = P(f^t\omega)x$ (т.е. при каждом фиксированном $\omega \in \mathbb{R}^n$ столбцы матрицы $P(\omega)$ образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^n$). Выпишем эти условия и построим матрицу $P(\omega)$. Пусть $b(\omega) \neq 0$ при всех $\omega \in E$; построим $\beta_0(\omega) = |b(\omega)|$ и $p_n(\omega) = b(\omega)/|b(\omega)|$. Тогда $|p_n(\omega)| = 1$. Построим далее функцию $\eta_n(\omega) = p_n^*(\omega)\big(A(\omega)p_n(\omega) - \dot p_n(\omega)\big)$ и, предполагая, что $h_n(\omega) \equiv \big(A(\omega) - \eta_n(\omega)\big)p_n(\omega) - \dot p_n(\omega) \neq 0$ при всех $\omega \in E$, построим функции $\beta_n(\omega) = |h_n(\omega)|$ и $p_{n-1}(\omega) = h_n(\omega)/|h_n(\omega)|$. Тогда $|p_{n-1}(\omega)| = 1$ и $p_{n-1}^*(\omega)p_n(\omega) = 0$. Продолжая этот процесс, на очередном шаге построим функции $\eta_k(\omega) = p_n^*(\omega)\big(A(\omega)p_k(\omega) - \dot p_k(\omega)\big)$,

$$a^0_{jk}(\omega) = p_j^*(\omega)\big(A(\omega)p_k(\omega) - \dot p_k(\omega)\big), \quad j = n-1, \dots, k,$$

и в предположении, что вектор

$$h_k(\omega) = A(\omega)p_k(\omega) - \dot{p}_k(\omega) - \sum_{i=k}^{n-1} a_{ik}^0(\omega)p_i(\omega) - \eta_k(\omega)p_n(\omega)$$

отличен от нуля при всех $\omega \in E$, построим

$$\beta_k(\omega) = |h_k(\omega)|, \quad p_{k-1}(\omega) = h_k(\omega)/|h_k(\omega)|, \quad k = n-1, \ldots, 2.$$

Тогда $|p_{k-1}(\omega)|=1$ и $p_j^*(\omega)p_{k-1}(\omega) = 0$, $j = n, \ldots, k$. Тем самым матрица

$$P(\omega) = \big(p_1(\omega), \ldots, p_n(\omega)\big) \tag{7.21}$$

построена, а первый столбец $a_1(\omega) = \operatorname{col}\big(a_{11}^0(\omega), \ldots, a_{n-1,1}^0(\omega), \eta_1(\omega)\big)$ матрицы $A_0(\omega)$ определяется равенством $a_1(\omega) = P^*(\omega)\big(\dot{p}_1(\omega) + A(\omega)p_1(\omega)\big)$. Для того чтобы матрица $P(\omega)$ стала ляпуновским преобразованием, достаточно потребовать непрерывность функции $\omega \to \dot{P}(\omega)$ на E.

Теорема 3. *Пусть для системы* (7.20) *при каждом $\omega \in E$ существует матрица* (7.21) *и функция $\omega \to \dot{P}(\omega)$ непрерывна. По матрице* (7.21) *построим матрицу $\mathcal{S}(\omega)$ (см.* (7.12)) *и управление*

$$v = |b(\omega)|^{-1}\big(\mu\mathcal{S}(\omega) - \eta(\omega)\big)P^*(\omega)y, \qquad \text{где} \qquad \mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$$

– произвольный фиксированный вектор,

$$\eta(\omega) = \big(\eta_1(\omega), \ldots, \eta_n(\omega)\big), \quad \eta_k(\omega) = p_n^*(\omega)\big(A(\omega)p_k(\omega) - \dot{p}_k(\omega)\big).$$

Тогда показатели Ляпунова замкнутой системы

$$\dot{y} = \left(A(f^t\omega) + \frac{b(f^t\omega)}{|b(f^t\omega)|}\big(\mu\mathcal{S}(f^t\omega) - \eta(f^t\omega)\big)P^*(f^t\omega)\right)y \tag{7.22}$$

совпадают с действительными частями $\operatorname{Re}(\lambda_k)$ корней λ_k характеристического уравнения $\lambda^n = \mu_1 + \cdots + \mu_n\lambda^{n-1}$ (см.(7.7)). *Более того, ляпуновское преобразование $y = \mathcal{P}(f^t\omega)z$ с матрицей $\mathcal{P}(\omega) = P(\omega)\mathcal{S}^{-1}(\omega)$ (не зависящей от μ), приводит систему* (7.22) *к системе $\dot{z} = \mathcal{F}_\mu z$ с матрицей $\mathcal{F}_\mu$, определенной равенством* (7.6).

Для доказательства этого утверждения построим матрицу $P(\omega)$ и матрицу $\mathcal{S}(\omega)$, затем приведем систему (7.20) (с помощью преобразования $y = P(\omega)x$) к дифференциальной цепочке (7.1), для которой построим управление $u^*(\omega,\mu)$, определенное равенствами (7.10). Легко проверить, что $u^*(\omega,\mu) = \mu\mathcal{S}(\omega) - \eta(\omega)$. Тогда управление

$$v(\omega,\mu,y) = |b(\omega)|^{-1}u^*(\omega,\mu)P^*(\omega)y \tag{7.23}$$

будет искомым для системы (7.20), которая запишется в виде (7.22).

Замечание. Построенное управление (7.23) стационарно относительно потока f^t и обладает свойством неупреждаемости в следующем смысле: пусть фиксировано $\omega \in E$, для вычисления $v(\omega,\mu,y)$ в точке ω достаточно знать значения матрицы $A(f^t\omega)$ и вектора $b(f^t\omega)$ в достаточно малой окрестности точки $t = 0$ (для того, чтобы построить необходимые производные в точке ω).

8. Достижимость и согласованность

Пусть множество значений управления U удовлетворяет условию $0 \in \operatorname{int} U$. Ясно тогда, что множество $\mathcal{G}(\omega) = \operatorname{orb}_+ G_{(I,I)}(\omega)$ (см. (5.5)), отвечающее $\mathcal{H} = \{(I, I)\}$, где I – единичная матрица, равномерно достижимо по траекториям системы $(\mathbb{A}, \omega)$ (соответствующее управление $u = 0$). Если при этом множество достижимости $\mathbb{D}_\vartheta(\omega)$ матричного уравнения (5.4) для некоторого $\vartheta > 0$ и всех $\omega \in E$ (E – компактное инвариантное множество в Ω) содержит шар $\mathcal{B}_\varepsilon$ внутри себя ($\varepsilon > 0$), то найдется такое $\delta > 0$, что множество $\mathcal{G}(\omega) = \operatorname{orb}_+ G_{\mathcal{H}}(\omega)$, отвечающее $\mathcal{H} \doteq \{(\mathcal{B}_\delta(I), \mathcal{B}_\delta(I))\}$, равномерно достижимо по траекториям системы $(\mathbb{A}, \omega)$. Но достаточные условия равномерной достижимости, т.е. справедливости включения $\mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathbb{D}_\vartheta(\omega)$, могут быть получены стандартным образом с помощью утверждений о локальной достижимости по первому приближению (если множество достижимости соответствующей линейной системы имеет непустую внутренность и $0 \in \operatorname{int} U$, то $\mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathbb{D}_\vartheta(\omega)$ при некотором $\varepsilon > 0$). В этом параграфе реализуется описанная схема.

Линеаризация системы (5.4) в окрестности точки $u = 0$, $Y = 0$ приводит к линейному по (Z, u) матричному дифференциальному уравнению

$$\dot{Z} = A_0(f^t\omega)Z + \big(A(f^t\omega)X_0(t, 0, \omega)\big)\diamond u, \quad Z \in \mathbb{M}(n), \quad u \in \mathbb{R}^r. \tag{8.1}$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_\vartheta(\omega)$ множество достижимости уравнения (8.1) из нуля за время ϑ под действием управлений $u : [0, \vartheta] \to \mathbb{R}^r$ (геометрические ограничения на U отсутствуют). Таким образом, $G \in \mathfrak{L}_\vartheta(\omega)$ в том и только том случае, если найдется такое управление $u_G : [0, \vartheta] \to \mathbb{R}^r$, что уравнение (8.1) при $u = u_G(t)$ имеет решение $Z(t)$, удовлетворяющее условиям $Z(0) = 0$, $Z(\vartheta) = G$. В силу линейности уравнения (8.1) множество $\mathfrak{L}_\vartheta(\omega)$ является линейным подпространством в $\mathbb{M}(n)$.

О п р е д е л е н и е (см. [18]). Пусть $U = \mathbb{R}^r$ и E – компактное инвариантное множество в Ω. Уравнение (8.1) называется *согласованным*, если найдется такое $\vartheta > 0$, что $\mathfrak{L}_\vartheta(\omega) = \mathbb{M}(n)$ и *равномерно согласованным на* E, если найдутся $\vartheta > 0$ и $\beta > 0$ такие, что для всех $\omega_0 \in E$ множество $\mathfrak{L}_\vartheta(\omega_0)$ совпадает с $\mathbb{M}(n)$, и для каждого $G \in \mathbb{M}(n)$ среди управлений $u_G(t, \omega)$, переводящих решения уравнения (8.1) из нуля в точку G в момент $t = \vartheta$, найдется такое, что $|u_G(t, \omega)| \leqslant \beta |G|$ для всех $\omega \in E$ и всех $0 \leqslant t \leqslant \vartheta$.

Будем говорить также, что система $(\mathbb{A}, \omega)$ *согласована* (*равномерно согласована* на E), если отвечающее ей матричное уравнение (8.1) согласованно (равномерно согласовано на E).

Оказывается, что вопрос о согласованности (равномерной согласованности) системы $(\mathbb{A}, \omega)$ решается в классических терминах управляемости (равномерной управляемости) некоторой вспомогательной системы [10]. Для формулировки этого утверждения введем в рассмотрение отображение $\operatorname{vec} : \mathbb{M}(n) \to \mathbb{R}^{n^2}$, которое “ разворачивает” матрицу $H = \{h_{ij}\}_{i,j=1}^n$ по строкам в вектор-столбец $\operatorname{vec} H \doteq \operatorname{col}(h_{11}, \ldots, h_{1n}, \ldots, h_{n1}, \ldots, h_{nn})$. Нетрудно проверить, что для любых $C, L, A, M \in \mathbb{M}(n)$ из равенства $C = LA$ следует равенство $\operatorname{vec} C = (L \otimes I) \operatorname{vec} A$, а из равенства $C = AM$ – равенство $\operatorname{vec} C = (I \otimes M^*) \operatorname{vec} A$, где $\otimes$ – кронекерово (прямое) произведение матриц [22, стр. 235].

Построим по системе $(\mathbb{A},\omega)$ так называемую “ большую систему”

$$\dot z = F(f^t\omega)z + G(f^t\omega)v, \qquad z\in\mathbb{R}^{n^2}, \quad v\in\mathbb{R}^r, \tag{8.2}$$

где $F = A_0\otimes I - I\otimes A_0^* \in \mathbb{M}(n^2)$, $G = (\operatorname{vec} A_1,\dots,\operatorname{vec} A_r)\in\mathbb{M}(n^2,r)$. Через $Z_0(t,s,\omega)$ обозначим матрицу Коши системы $\dot z = F(f^t\omega)z$. Систему (8.2) будем отождествлять с тройкой (F,G,ω).

Напомним, что система (F,G,ω) называется вполне управляемой [43, гл. 6, § 20], если при некотором $\vartheta>0$ матрица управляемости

$$W(\vartheta,\omega) = \int\limits_0^{\vartheta} Z_0(0,t,\omega)G(f^t\omega)G^*(f^t\omega)Z_0^*(0,t,\omega)\,dt \tag{8.3}$$

определенно положительна, и равномерно вполне управляемой на E [23], если найдется такое $\vartheta>0$, что $W(\vartheta,\omega)$ определенно положительна равномерно относительно $\omega\in E$, т.е. существуют $\vartheta>0$ и $\varepsilon>0$, что $W(\vartheta,\omega)\geqslant \varepsilon I$ для всех $\omega\in E$ (неравенство в смысле квадратичной формы).

Теорема 4. (см. [18]) *Система $(\mathbb{A},\omega)$ согласована (равномерно согласована на E) в том и только том случае, если система (F,G,ω) вполне управляема (равномерно вполне управляема на E).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в рассмотрение так называемую матрицу согласования [18]

$$\Gamma(\vartheta,\omega) = \int\limits_0^{\vartheta}\sum_{i=1}^{r}\operatorname{vec}\widehat{A}_i(t,\omega)\cdot(\operatorname{vec}\widehat{A}_i(t,\omega))^*\,dt,$$

где $\widehat{A}_i(t,\omega) = X_0(0,t,\omega)A_i(f^t\omega)X_0(t,0,\omega)$, $i=1,\dots,r$. В [18, теорема 4] показано, что положительная определенность матрицы $\Gamma(\vartheta,\omega)$ (при некотором $\vartheta>0$) обеспечивает согласованность системы $(\mathbb{A},\omega)$ при фиксированном ω, а равномерная на E положительная определенность – равномерную согласованность.

Далее, нетрудно проверить, что $Z_0(0,t,\omega) = X_0(0,t,\omega)\otimes X_0^*(t,0,\omega)$, поэтому $Z_0(0,t,\omega)G(f^t\omega) = (\operatorname{vec}\widehat{A}_1(t,\omega),\dots,\operatorname{vec}\widehat{A}_r(t,\omega))$. Следовательно,

$$W(\vartheta,\omega) = \int\limits_0^{\vartheta}\sum_{i=1}^{r}\operatorname{vec}\widehat{A}_i(t,\omega)\cdot(\operatorname{vec}\widehat{A}_i(t,\omega))^*\,dt.$$

Таким образом, $\Gamma(\vartheta,\omega) = W(\vartheta,\omega)$. Теорема доказана.

Теорема 5. (см. [18]) *Пусть множество U компактно, $0\in \operatorname{int} U$ и система $(\mathbb{A},\omega)$ согласована соответственно, (равномерно согласована на E), тогда найдется такое $\delta>0$, что множество $\mathcal{G}(\omega)$ (см. (5.5)), отвечающее множеству $\mathcal{H}\doteq\{(H_0,H^0)\colon\ H_0\in\mathcal{B}_\delta(I),\ H^0\in\mathcal{B}_\delta(I)\}$, достижимо (равномерно достижимо на E) по траекториям системы $(\mathbb{A},\omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матричное уравнение (8.1) служит линейным приближением (в окрестности точки $Y = 0$, $u = 0$) для системы (5.4), а свойство согласованности, сформулированное в терминах уравнения (8.1), эквивалентно свойству полной достижимости уравнения (8.1) (т.е. множество достижимости $\mathfrak{L}_\vartheta(\omega)$ уравнения (8.1) совпадает с пространством $\mathbb{M}(n)$). Воспользуемся теоремой 3 работы [44]. С этой целью матрицы Y и Z в уравнениях (5.4) и (8.1) “ развернем в вектор”, а в теореме 3 работы [44] проведем замену времени $t \to \vartheta - t$ и слова “ локальная управляемость в малом” заменим на слова “ локальная достижимость в малом” (локальная достижимость в малом означает локальную достижимость “ развернутой системы” (5.4), дополненную следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|G| < \delta$, то решение $Y(t, \omega)$, переходящее в точку $Y(\vartheta, \omega) = G$ при надлежащем управлении, удовлетворяет для всех $t \in [0, \vartheta]$ неравенству $|Y(t, \omega)| < \varepsilon$). В силу условия $0 \in \operatorname{int} U$ и процитированной теоремы 3 работы [44] первое утверждение доказано.

Второе утверждение теоремы после аналогичных рассуждений следует из теоремы 1 работы [45] (в этой работе требуется минимальность множества E, но это предположение излишне: достаточно предполагать, что E компактно). Теорема доказана.

9. Теорема о приводимости

В этом параграфе доказана теорема о локальной приводимости, анонсированная в [2] и получен ряд дополнений к этой теореме.

Пусть E – компактное инвариантное множество в Ω и задана произвольная функция $P\colon E \to \mathbb{M}(n)$, удовлетворяющая основному условию. Обозначим через $Y_P(t, s, \omega)$ матрицу Коши системы

$$\dot{y} = \big(A_0(f^t\omega) + P(f^t\omega)\big). \tag{9.1}$$

Далее,

$$H_0(\vartheta, \omega) = Y_P(\vartheta, 0, \omega) X_0(0, \vartheta, \omega), \quad H(\vartheta, \omega) \doteq (H_0(\vartheta, \omega), I),$$

тогда $G(\vartheta, \omega) \doteq H_0(\vartheta, \omega) X_0(\vartheta, 0, \omega) I = Y_P(\vartheta, 0, \omega)$ и

$$\mathcal{G}(\omega) = \operatorname{orb}_+ Y_P(\omega) \doteq \{Y_P(\vartheta, 0, \omega)\colon\ \vartheta \geqslant 0\}.$$

В этом частном случае вопрос о равномерной достижимости множества $\mathcal{G}(\omega)$ по траекториям системы $(\mathbb{A}, \omega)$ сводится к вопросу о равномерной достижимости положительной полутраектории $\operatorname{orb}_+ Y_P(\omega)$.

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что функция $P\colon E \to \mathbb{M}(n)$ *допустима*, если множество $\operatorname{orb}_+ Y_P(\omega)$ равномерно достижимо по траекториям системы $(\mathbb{A}, \omega)$.

З а м е ч а н и е. Ясно, что допустимыми являются все функции $P(\omega)$ вида $P(\omega) = u^*(\omega) \diamond A(\omega)$, где $u(\omega)$ пробегает множество U (в этом случае $Y_P(\vartheta, 0, \omega) \in \mathfrak{D}_\vartheta(\omega)$ для всех $\vartheta \geqslant 0$ и $\omega \in E$, а соответствующее управление $u = u(f^t\omega)$ стационарно относительно потока), но если система $(\mathbb{A}, \omega)$ обладает свойством равномерной локальной достижимости (т.е. $\mathcal{B}_\varepsilon(I) \subset \mathfrak{D}_\vartheta(\omega)$ для некоторых $\vartheta > 0$, $\varepsilon > 0$ и всех $\omega \in E$), то среди допустимых есть функции $P(\omega)$, не описываемые равенством $P(\omega) = u^*(\omega) \diamond A(\omega)$.

Теорема 6 (о локальной приводимости). *Пусть U – компактное множество. Для всякой допустимой функции $P:\ E \to \mathbb{M}(n)$ найдется допустимое управление $u_P(t,\omega)$, что преобразование $x = L_P(t,\omega)y$, где $L_P(t,\omega) = X_{u_P}(t,0,\omega)Y_P^{-1}(t,0,\omega)$, приводящее систему*

$$\dot{x} = \big(A_0(f^t\omega) + u_P^*(t,\omega)\diamond A(f^t\omega)\big)x \tag{9.2}$$

к системе (9.1)*, является преобразованием Ляпунова.*

Доказательство этой теоремы опирается на ряд лемм, сформулированных ниже.

Лемма 6. *Пусть E – инвариантное компактное множество в Ω и задано произвольное допустимое управление $u:\ \mathbb{R}\times E \to U$. Если для некоторого $\tau > 0$ и всех t имеет место равенство*

$$u(t,\omega) = u(t-\tau, f^\tau\omega), \tag{9.3}$$

то $X_u(t+\tau, s+\tau, \omega) = X_u(t,s,f^\tau\omega)$, $(t,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Если равенство (9.3) *выполнено для любого $\tau\in\mathbb{R}$ и всех $t\in\mathbb{R}$, то управление $u(t,\omega)$ стационарно относительно потока f^t, т. е. $u(t,\omega) = \widehat{u}(f^t\omega)$ для некоторой функции $\widehat{u}\colon E\to U$.*

Доказательство. Из (9.3) следует, что $u(t+\tau,\omega) = u(t, f^\tau\omega)$. Далее, матрица Коши $X_u(t,s,\omega)$ удовлетворяет системе (5.2) при управлении $u = u(t,\omega)$. Проведем в тождестве

$$\dot{X}_u(t,s,\omega) = \big(A_0(f^t\omega) + u^*(t,\omega)\diamond A(f^t\omega)\big)X_u(t,s,\omega), \quad (t,s)\in\mathbb{R}^2, \tag{9.4}$$

замену $t\to t+\tau$, $s\to s+\tau$. Тогда, с учетом (9.3), легко убедиться, что матрица $X_u(t+\tau, s+\tau,\omega)$ является матрицей Коши системы $(\mathbb{A}, f^\tau\omega)$ при $u = u(t, f^\tau\omega)$. Поэтому $X_u(t+\tau,s+\tau,\omega) = X_u(t,s,f^\tau\omega)$. Второе утверждение следует из (9.3) при $\tau = t$. Лемма доказана.

Непосредственной проверкой легко убедиться, что справедлива следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть заданы инвариантное компактное множество E в Ω и произвольная функция $P:\ \Omega\to\mathbb{M}(n)$, удовлетворяющая основному условию. Если $Z(t,s,\omega)$ – решение задачи*

$$\dot{Z} = A_0(f^t\omega)Z - ZA_0(f^t\omega) + P(f^t\omega)Z, \quad Z(s) = I, \tag{9.5}$$

то матрица $Y(t,s,\omega) = Z(t,s,\omega)X_0(t,s,\omega)$ является матрицей Коши системы (9.1).

Далее, для всякого допустимого управления $u = u(t,\omega)$ матрица

$$L_u(t,\omega) = X_u(t,0,\omega)Y^{-1}(t,0,\omega) \tag{9.6}$$

является решением задачи

$$\dot{L} = \big(A_0(f^t\omega) + u^*(t,\omega)\diamond A(f^t\omega)\big)L - LA_0(f^t\omega) - LP(f^t\omega),\ L(0) = I. \tag{9.7}$$

Любому допустимому управлению $u = u(t,\omega)\in U$ и любой функции $P\colon E\to\mathbb{M}(n)$, удовлетворяющей основному условию, отвечает линейное невырожденное (но не обязательно ляпуновское) преобразование $x = L_u(t,\omega)y$, где функция $L_u:\ \mathbb{R}\times E\to\mathbb{G}_+(n)$ определена равенством (9.6)*, приводящее систему $(\mathbb{A},\omega)$ (при $u = u(t,\omega)$) к системе* (9.1).

Введем в рассмотрение задачу Коши для дискретного матричного уравнения

$$W_{k+1} = Q(f^{t_k}\omega)W_k, \quad W_0 = I, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{9.8}$$

в пространстве $\mathbb{M}(n)$, где заданная непрерывная функция $Q\colon \Omega \to \mathbb{M}(n)$ такова, что $\det Q(\omega) \neq 0$ при всех $\omega \in E$ (E – компактное инвариантное множество в Ω); $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ – фиксированная последовательность, удовлетворяющая условиям: $t_0 = 0$, $0 < t_{k+1} - t_k \leqslant \vartheta^*$, $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$ (такую последовательность будем называть *допустимой*).

Лемма 8. *Пусть заданы компактное инвариантное множество E в Ω и множество $\mathcal{H} \subset \mathbb{G}_+(n) \times \mathbb{G}_+(n)$. Если множество $\mathcal{G}(\omega)$ (см.* (5.5)), *построенное по $\mathcal{H}$, равномерно* (*относительно E*) *достижимо по траекториям системы* $(\mathbb{A}, \omega)$, *то для каждой непрерывной функции $H = (H_0, H^0)\colon E \to \mathcal{H}$ найдутся допустимое управление $u\colon \mathbb{R} \times E \to U$, число $\vartheta^* > 0$, функция $\vartheta\colon E \to (0, \vartheta^*]$ и допустимая последовательность $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $t_k = \vartheta_0 + \cdots + \vartheta_k$, $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_k = \vartheta(f^{t_{k-1}}\omega)$ такие, что последовательность $\{W_k \doteq X_u(t_k, 0, \omega)\}_{k=0}^{\infty}$ является решением задачи* (9.8) *при $Q(\omega) = H_0(\omega)X_0(\vartheta(\omega), 0, \omega)H^0(\omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть фиксирована непрерывная функция $H(\omega) = \big(H_0(\omega), H^0(\omega)\big) \in \mathcal{H}$. В силу определения $\mathcal{H}$-равномерной достижимости на E и леммы 3, существуют функция $\vartheta(\omega) \doteq \vartheta\big(H(\omega)\big)$, $\vartheta(\omega) \in (0, \vartheta^*]$ и управление $u_0(t, \omega) \doteq u_0\big(t, H(\omega)\big)$, $t \in [0, \vartheta(\omega)]$ такие, что

$$X_{u_0}(\vartheta(\omega), 0, \omega) = H_0(\omega)X_0(\vartheta(\omega), 0, \omega)H^0(\omega) \doteq Q(\omega), \quad \omega \in E. \tag{9.9}$$

Введем в рассмотрение две последовательности $\{\vartheta_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $\vartheta_0 = 0$, $\vartheta_k = \vartheta(f^{t_{k-1}}\omega)$, $t_k = \vartheta_0 + \cdots + \vartheta_k$. Напомним еще раз, что матрицу Коши системы $(\mathbb{A}, \omega)$ при управлении $u(t, \omega)$ мы обозначаем $X_u(t, s, \omega)$, поэтому $X_u(t, s, f^{\tau}\omega)$ – матрица Коши системы $(\mathbb{A}, f^{\tau}\omega)$ при управлении $u(t, f^{\tau}\omega)$. С учетом сказанного, каждому $k = 0, 1, 2, \ldots$ поставим в соответствие управление $t \to u_0(t, f^{t_k}\omega)$, определенное при $t \in [0, \vartheta_{k+1}]$ и в силу (9.9), обеспечивающее для уравнения $(\mathbb{A}, f^{t_k}\omega)$ равенство

$$X_{u_0}(\vartheta_{k+1}, 0, f^{t_k}\omega) = Q(f^{t_k}\omega), \quad u_0 = u_0(t, f^{t_k}\omega), \quad \omega \in E. \tag{9.10}$$

“ Растянем” теперь последовательность $\{u_0(t, f^{t_k}\omega), 0 \leqslant t \leqslant \vartheta_{k+1}\}_{k=0}^{\infty}$, на $\mathbb{R}$, определив управление $u\colon \mathbb{R} \times E$ на полуинтервалах $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$ равенствами $u(t, \omega) \doteq u_0(t - t_k, f^{t_k}\omega)$, $t \in \Delta_k$. В тождестве

$$\dot{X}_u(t, t_k, \omega) = \big(A_0(f^t\omega) + u^*(t, \omega) \diamond A(f^t\omega)\big)X_u(t, t_k, \omega), \quad t \in \mathbb{R},$$

рассматриваемом только при $t \in \Delta_k$, заменим $u(t, \omega)$ на $u_0(t - t_k, f^{t_k}\omega)$, а затем поменяем t на $t + t_k$. Тогда при $t \in [0, \vartheta_{k+1})$ получим

$$\dot{X}_u(t + t_k, t_k, \omega) = \Big(A_0\big(f^t(f^{t_k}\omega)\big) + u_0^*(t, f^{t_k}\omega) \diamond A\big(f^t(f^{t_k}\omega)\big)\Big)X_u(t + t_k, t_k, \omega).$$

Таким образом, для $t \in [0, \vartheta_{k+1})$ матрица $X_u(t + t_k, t_k, \omega)$ является нормированной фундаментальной матрицей системы $(\mathbb{A}, f^{t_k}\omega)$ при управлении $u = u_0(t, f^{t_k}\omega)$. Поэтому для $t \in [0, \vartheta_{k+1})$ имеет место равенство

$X_u(t+t_k,t_k,\omega) = X_{u_0}(t,0,f^{t_k}\omega)$, которое при $t=\vartheta_{k+1}$ переходит в равенство $X_u(t_{k+1},t_k,\omega) = X_{u_0}(\vartheta_{k+1},0,f^{t_k}\omega)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} W_{k+1} &= X_u(t_{k+1},0,\omega) = X_u(t_{k+1},t_k,\omega)X_u(t_k,0,\omega) = \\ &= X_{u_0}(\vartheta_{k+1},0,f^{t_k}\omega)X_u(t_k,0,\omega) = Q(f^{t_k}\omega)X_u(t_k,0,\omega) = Q(f^{t_k}\omega)W_k. \end{aligned}$$

Так как $W_0 = X_u(t_k,0,\omega)|_{k=0} = I$, то лемма доказана.

Доказательство теоремы 6. В силу леммы 7 невырожденное преобразование $L(t,\omega) = X_u(t,0,\omega)Y_P^{-1}(t,0,\omega)$ приводит систему (9.2) к системе (9.1) при любом допустимом управлении $u=u(t,\omega)$. Надо показать, что найдется допустимое управление, при котором преобразование $L(t,\omega)$ будет ляпуновским.

Так как функция $P(\omega)$ допустима, то найдутся число $\vartheta^*>0$, функция $\vartheta:\ E\to(0,\vartheta^*]$ и допустимое управление $u_0(t,\omega)$, $t\in[0,\vartheta(\omega)]$ такие, что для всех $\omega\in E$ выполнено равенство $X_u(\vartheta(\omega),0,\omega) = Y_P(\vartheta(\omega),0,\omega)$. Введем в рассмотрение построенные при доказательстве леммы 8 последовательности $\{\vartheta_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$, где $\vartheta_0=0$, $\vartheta_k=\vartheta(f^{t_{k-1}}\omega)$, $t_k=\vartheta_0+\dots+\vartheta_k$, и “ растянутое” управление, которое на этот раз мы обозначим $u_P(t,\omega)$: $u_P(t,\omega) \doteq u_0(t-t_k,f^{t_k}\omega)$ при $t\in[t_k,t_{k+1})$.

Построим по управлению $u_P(t,\omega)$ функцию

$$L_P(t,\omega) = X_{u_P}(t,0,\omega)Y_P^{-1}(t,0,\omega), \quad (t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times E \tag{9.11}$$

и покажем, что (9.11) является ляпуновским преобразованием.

Во-первых, в силу компактности множества U управление $u_P(t,\omega)$ ограничено на $\mathbb{R}_+\times E$. Поэтому из ограниченности $A_0(\omega)$ и $A(\omega)$ на E следует, что найдется константа a (не зависящая от ω), обеспечивающая для всех $(t,s)\in\Delta_k\times\Delta_k$, всех $k=0,1,\dots$ и всех $\tau\geqslant 0$ неравенства $|X_{u_P}(t,s,f^{\tau}\omega)|\leqslant a$. Аналогичным образом доказываются неравенства $|Y_P(t,s,f^{\tau}\omega)|\leqslant a$, $(t,s)\in\Delta_k\times\Delta_k$.

Отметим, во-вторых, что в силу леммы 8 при $k=0,1,\dots$ имеют место равенства $X_{u_P}(t_{k+1},0,\omega) = Q(f^{t_k}\omega)X_{u_P}(t_k,0,\omega)$, где

$$Q(\omega) = H_0(\vartheta(\omega),\omega)X_0(\vartheta(\omega),0,\omega)I = Y_P(\vartheta(\omega),0,\omega).$$

Следовательно, для $L_P(t,\omega)$ имеем:

$$\begin{aligned} L_P(t_{k+1},\omega) &= X_{u_P}(t_{k+1},0,\omega)Y_P^{-1}(t_{k+1},0,\omega) = \\ &= Y_P(\vartheta(f^{t_k}\omega),0,f^{t_k}\omega)X_{u_P}(t_k,0,\omega)Y_P^{-1}(t_{k+1},0,\omega) = \\ &= Y_P(\vartheta(f^{t_k}\omega),0,f^{t_k}\omega)L_P(t_k,\omega)Y_P(t_k,0,\omega)Y_P^{-1}(t_{k+1},0,\omega) = \\ &= Y_P(\vartheta_{k+1},0,f^{t_k}\omega)L_P(t_k,\omega)Y_P^{-1}(t_{k+1},t_k,\omega) = \\ &= Y_P(\vartheta_{k+1},0,f^{t_k}\omega)L_P(t_k,\omega)Y_P^{-1}(\vartheta_{k+1},0,f^{t_k}\omega). \end{aligned}$$

Поэтому, если $L_P(t_k,\omega)=I$, то $L_P(t_{k+1},\omega)=I$. Поскольку $L_P(t_0,\omega)=I$, то $L_P(t_k,\omega)=I$ для всех $k=1,2,\dots$.

Таким образом, показано, что $|L_P(t,\omega)|\leqslant a^2$ для всех $t\in\Delta_k$, $\omega\in E$, причем a не зависит от k. Следовательно, $L_P(t,\omega)$ ограничена на $\mathbb{R}_+\times E$. Аналогично рассуждая, можно показать ограниченность $L_P^{-1}(t,\omega)$. Ограниченность $dL_P(t,\omega)/dt$ следует из равенства (9.7). Теорема доказана.

10. Теоремы об управляемости показателей

Непосредственно из теоремы 6 получаем следующее утверждение, которое нам понадобится в этом параграфе.

Теорема 7 (о локальной приводимости). *Пусть U – компактное множество в $\mathbb{R}^r$, $0 \in \operatorname{int} U$, E – инвариантное компактное множество в Ω и система $(\mathbb{A}, \omega)$ равномерно согласована на E. Тогда для некоторого $\delta > 0$ и любой функции $P: E \to \mathbb{M}(n)$, удовлетворяющей неравенству $|P(\omega)| \leqslant \delta$ при всех $\omega \in E$, найдется допустимое управление $u_P(t, \omega)$ такое, что преобразование $x = L_P(t, \omega)y$, где $L_P(t, \omega) = X_{u_P}(t, 0, \omega)Y_P^{-1}(t, 0, \omega)$, приводящее систему* (9.2) *к системе* (9.1)*, является преобразованием Ляпунова.*

В этом параграфе будем предполагать, что E – минимальное множество (т.е. $E = \overline{\gamma}(\omega)$) и функция $f^t: E \to E$ непрерывна в каждой точке $\omega_0 \in E$ равномерно относительно t на любом отрезке $|t| \leqslant N$. В этом случае, в силу теоремы Биркгофа (см. [14], гл. 5, §7), всякое движение в E рекуррентно: для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $\omega_0 \in E$ найдутся число $\vartheta > 0$ и последовательность $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ такие, что $0 < t_{k+1} - t_k \leqslant \vartheta$ и $\rho(f^{t_k}\omega_0, \omega_0) < \varepsilon$. Более того, в силу равномерной непрерывности потока от начальных данных, имеет место более сильное свойство: для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ и любой точки $\omega_0 \in E$ найдутся число $\vartheta > 0$ и последовательность $\{t_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ такие, что $0 < t_{k+1} - t_k \leqslant \vartheta$ и $\max_{|t| \leqslant N} \rho(f^{t+t_k}\omega_0, f^t\omega_0) < \varepsilon$ (другими словами, множество $\{\tau \in \mathbb{R}\colon \max_{|t| \leqslant N} \rho(f^{t+\tau}\omega_0, f^t\omega_0) < \varepsilon\}$ относительно плотно на $\mathbb{R}$).

Мы предполагаем, что фазовое пространство Ω имеет счетную базу. В этом случае, в силу теоремы Н.Н. Крылова и Н.Н. Боголюбова [14, гл. 6, стр. 514], на E существует регулярная нормированная борелевская мера p (мера p определена на Σ-алгебре всех борелевских множеств в E), инвариантная относительно потока f^t ($p(E) = 1$ и $p(f^t\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ для любого измеримого множества $\mathcal{E} \subset E$ и всех $t \in \mathbb{R}$). Далее, в силу эргодической теоремы Биркгофа–Хинчина [14, стр. 489] для любой p-измеримой функции $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ существует точный предел

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(f^s\omega)ds, \quad \omega \notin \mathcal{E},$$

за возможным исключением точек $\omega \in \mathcal{E}$ некоторого множества $\mathcal{E} \subset E$ меры нуль и этот предел не зависит от ω.

Теорема 8 (о локальной управляемости показателей). *Пусть множество U компактно, $0 \in \operatorname{int} U$, множество E минимально и система $(\mathbb{A}, \omega)$ равномерно согласована на E. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что для любого вектора $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \mathcal{O}_\delta^n$ существует допустимое управление $u_\mu(t, \omega)$ при котором для почти всех $\omega \in E$ (относительно любой инвариантной нормированной меры на E) система*

$$\dot{x} = \big(A_0(f^t\omega) + u_\mu^*(t, \omega) \diamond A(f^t\omega)\big)x \tag{10.1}$$

правильная и ее показатели Ляпунова $\lambda_i\big(\omega, u_\mu(\cdot)\big)$ *удовлетворяют равенствам* $\lambda_i\big(\omega, u_\mu(\cdot)\big) = \lambda_i + \mu_i$, $i = 1, \ldots, n$, *где* λ_i *– показатели Ляпунова системы* $\dot{x} = A_0(f^t\omega)x$.

Доказательство. Пусть $\omega \to F(\omega)$ – непрерывная функция на E со значениями в конечномерном пространстве, тогда легко проверить, что для каждого фиксированного $\omega \in E$ функция F рекуррентна, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\tau \in \mathbb{R} : \max\limits_{|t| \leqslant \varepsilon^{-1}} |F(f^{t+\tau}\omega) - F(f^t\omega)| < \varepsilon\}$ относительно плотно.

Вообще, произвольная непрерывная функция $L\colon\ \mathbb{R} \times E$, где E – минимальное множество, называется рекуррентной по t равномерно относительно $\omega \in E$, если для любого $\varepsilon > 0$ множество

$$\Sigma_\varepsilon(\omega) \doteq \{\tau \in \mathbb{R}\colon \max_{|t| \leqslant \varepsilon^{-1}} |L(t+\tau, \omega) - L(t, \omega)| < \varepsilon\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$ равномерно относительно ω (существует не зависящее от ω число $\vartheta = \vartheta(\varepsilon) > 0$ такое, что множество $\Sigma_\varepsilon(\omega) \bigcap [\tau, \tau + \vartheta]$ непусто для всех $\tau \in \mathbb{R}$).

Будем рассматривать систему уравнений $(\mathbb{A}, \omega)$ и ее ляпуновские преобразования $L : \mathbb{R} \times E \to \mathbb{G}_+(n)$. В дальнейшем ляпуновское преобразование L будем называть перроновским преобразованием системы $(\mathbb{A}, \omega)$, если для каждого $\omega \in E$ функция $t \to L(t, \omega)$ есть перроновское преобразование (см. [15], стр. 263) однородной системы $\dot{x} = A_0(f^t\omega)x$. Это означает, что при всех $(t, \omega) \in \mathbb{R} \times E$ матрица L ортогональна (т.е. $L^*L = I$) и матрица $F_0(t, \omega) \doteq L^*(t, \omega)A_0(f^t\omega)L(t, \omega) - L^*(t, \omega)\dot{L}(t, \omega)$, где $\dot{L}(t, \omega) = dL(t, \omega)/dt$, является нижней треугольной матрицей.

В работе [46] В.М. Миллионщиковым доказано, что если множество E минимально, то перроновское преобразование рекуррентно по t равномерно относительно $\omega \in E$. Отсюда, вообще говоря, не следует, что в случае, когда множество E состоит, например, из почти периодических (или периодических, фиксированного периода $T > 0$) движений, то функция $t \to L(t, \omega)$ является почти периодической (периодической периода T). Поэтому нельзя утверждать, что перроновское преобразование рекуррентной системы обязательно представимо в виде $L(f^t\omega)$. В частности, перроновское преобразование периодической (почти периодической) системы не обязательно периодическое (почти периодическое).

Зафиксируем перроновское преобразование $x = L(t, \omega)y$ $(L(0, \omega) = I)$ и приведем систему $(\mathbb{A}, \omega)$ к виду $(\mathbb{F}, \omega)$:

$$\dot{x} = \big(F_0(t, \omega) + u^* \diamond F(t, \omega)\big)x, \tag{10.2}$$

где $F_0(t, \omega) = \{f_{ij}^0(t, \omega)\}_{i,j=1}^n$ – нижняя треугольная матрица. Тем самым, для почти всех $\omega \in E$ (относительно любой инвариантной нормированной меры на E) система (10.2) при $u = 0$ имеет точные показатели Ляпунова

$$\lambda_i = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int\limits_0^t f_{ii}^0(t, \omega)dt, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{10.3}$$

не зависящие от ω. Действительно, из теоремы Биркгофа–Хинчина следует, что пределы (10.3) существуют для почти всех $\omega \in E$, а из теоремы

Ляпунова [15, стр. 141] следует, что если существуют точные средние от элементов, стоящих на диагонали треугольной системы $\dot{x} = F_0(t,\omega)x$, то такая система правильная, и ее показатели Ляпунова совпадают с (10.3).

Выберем все $\omega \in E$, при которых система (10.2) имеет точные показатели и для каждой такой системы построим множество достижимости $\mathfrak{D}_\vartheta(\mathbb{F},\omega)$. Из леммы 4, следует равенство $\mathfrak{D}_\vartheta(\mathbb{F},\omega) = L^*(\vartheta,\omega)\mathfrak{D}_\vartheta(\mathbb{A},\omega)$, поэтому $\mathbb{D}_\vartheta(\mathbb{F},\omega) = L^*(\vartheta,\omega)\mathbb{D}_\vartheta(\mathbb{A},\omega)$. Далее, если $\mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathbb{D}_\vartheta(\mathbb{A},\omega)$, то (в силу ортогональности L) $\mathcal{B}_\varepsilon \subset \mathbb{D}_\vartheta(\mathbb{F},\omega)$. Следовательно, с учетом условий теоремы, система (10.2) равномерно достижима на E.

Так как система (10.2) равномерно достижима, то, в силу теоремы 7, найдется $\delta > 0$, что при некотором допустимом управлении $u_P(t,\omega)$ она приводима ляпуновским преобразованием к заданной системе

$$\dot{x} = \big(F_0(t,\omega) + P(f^t\omega)\big)x, \quad |P(\omega)| \leqslant \delta, \tag{10.4}$$

и, в частности, к системе (10.4) с матрицей $P = \operatorname{diag}\{\mu_1,\ldots,\mu_n\}$, где μ_i близки к нулю. Показатели Ляпунова получившейся системы совпадают с числами $\lambda_i + \mu_i$. Теорема доказана.

Приведем одно следствие теоремы 8. Пусть $f^t\omega_0$ – почти периодическое движение (для всякого $\varepsilon > 0$ множество

$$\{\tau \in \mathbb{R}\colon \sup_{-\infty<t<\infty} \rho(f^{t+\tau}\omega_0, f^t\omega_0) < \varepsilon\}$$

относительно плотно на $\mathbb{R}$), $E = \overline{\gamma}(\omega_0)$. В этом случае динамическая система (E, f^t) является строго эргодической [14, стр. 531] (т.е. в E существует единственная инвариантная нормированная мера μ и все точки E являются точками плотности относительно этой меры). Поэтому мера $\mu(E_0)$ всякого инвариантного относительно потока f^t множества $E_0 \subset E$ равна либо нулю, либо единице. Кроме того, пространство E обладает свойством Бэра [47, стр. 145] (это означает, что для любого $E_0 \subset E$ равенство $\mu(E_0) = 0$ имеет место тогда и только тогда, когда E_0 является множеством первой категории Бэра) и всякое множество первой категории нигде не плотно в E.

Следствие 2 (теоремы 8). *Предположим, что множество U компактно, $0 \in \operatorname{int} U$ и ω_0 – почти периодическая точка множества Ω. Далее, пусть $E = \overline{\gamma}(\omega_0)$ и система $(\mathbb{A},\omega)$ равномерно согласована на E. Тогда для некоторого $\delta > 0$ и любого вектора $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_n) \in \mathcal{O}^n_\delta$ существует такое допустимое управление $u_\mu(t,\omega)$, что для каждого $\omega \in E$ (за возможным исключением точек некоторого нигде не плотного множеств $E_0 \subset E$) система (10.1) правильная и ее показатели Ляпунова $\lambda_i\big(\omega, u_\mu(\cdot)\big)$ удовлетворяют равенствам*

$$\lambda_i\big(\omega, u_\mu(\cdot)\big) = \lambda_i + \mu_i, \quad i = 1,\ldots,n,$$

где λ_i – показатели Ляпунова системы $\dot{x} = A_0(f^t\omega)x$, $\omega \in E \setminus E_0$.

Поступила 1.06.99

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] **Тонков Е.Л.** Задачи управления показателями Ляпунова // Успехи мат. наук, 1998. Т. 53, вып. 4(322). С. 146.

[2] **Tonkov E.L.** The optimal control of Lyapunov exponents // Intern. Conf. Dedic. 90th Ann. L.S. Pontryagin. Optimal Control and App., Moscow, 1998. M.: Moscow State Univ, 1998. P. 334-335.

[3] **Панасюк А.И., Панасюк В.И.** Асимптотическая магистральная оптимизация управляемых систем. Минск: Наука и техника, 1986. 296 с.

[4] **Тонков Е.Л.** Оптимальное управление периодическими движениями // Мат. физика: Респ. межвед. сб. Киев, 1977. № 22. С. 55-65.

[5] **Иванов А.Г.** Оптимальное управление почти периодическими движениями //Прикл. математика и механика, 1992. Т. 56, вып. 5. С. 837-846.

[6] **Попова С.Н.** К вопросу об управлении показателями Ляпунова // Вестн. Удмурт. ун-та. Ижевск, 1992. Вып. 1. С. 23-39.

[7] **Попова С.Н., Тонков Е.Л.** Управление показателями Ляпунова согласованных систем. I // Дифференц. уравнения, 1994. Т. 30, № 10. С. 1687-1696.

[8] **Попова С.Н., Тонков Е.Л.** Управление показателями Ляпунова согласованных систем. II // Дифференц. уравнения, 1994. Т. 30, № 11. С. 1949-1957.

[9] **Попова С.Н., Тонков Е.Л.** Управление показателями Ляпунова согласованных систем. III // Дифференц. уравнения, 1995. Т. 31, № 2. С. 228-238.

[10] **Попова С.Н., Тонков Е.Л.** К вопросу о равномерной согласованности линейных систем // Дифференц. уравнения, 1995. Т. 31, № 4. С. 723–724.

[11] **Тонков Е.Л.** Задачи управления показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения, 1995. Т. 31, № 10. С. 1682–1686.

[12] **Попова С.Н., Тонков Е.Л.** Равномерная управляемость показателей Ляпунова // Успехи мат. наук, 1995 . Т. 50, вып. 4 (302). С. 108–109.

[13] **Попова С.Н. Тонков Е.Л.** Согласованные системы и управление показателями Ляпунова // Дифференц. уравнения, 1997. Т. 33, № 2. С. 226-235.

[14] **Немыцкий В.В. Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1949. 550 с.

[15] **Былов Б.Ф., Виноград Р.Э., Гробман Д.М., Немыцкий В.В.** Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966. 576 с.

[16] **Попов В.М.** Гиперустойчивость автоматических систем. М.: Наука, 1970. 454 с.

[17] **Зайцев В.А.** Достижимость и локальная управляемость показателей Ляпунова систем со случайными параметрами // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1998. Т 13, вып. 2. С. 71-88.

[18] **Зайцев В.А., Тонков Е.Л.** Достижимость, согласованность и метод поворотов В. М. Миллионщикова // Изв. вузов. Математика, 1999. Т 441, № 2. С. 45–56.

[19] **Brunovsky P.** Controllability and Linear Closed-loop Controls in Linear Periodic Systems // J. Different. Equat, 1969. №. 6. P. 296-313.

[20] **Изобов Н.А.** Линейные системы дифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Мат. анализ, 1974. Т. 12. С. 71-146.

[21] **Миллионщиков В.М.** Метрическая теория линейных систем дифференциальных уравнений // Мат. сб. 1968. Т. 77, №2. С.163-173.

[22] **Ланкастер П.** Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.

[23] **Тонков Е.Л.** О равномерной локальной управляемости линейного уравнения // Мат. физика: Респ. межвед. сб. Киев, 1983. №33. С.44-53.

[24] **Макаров Е.К., Попова С.Н.** О достаточных условиях локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова двумерных систем с кратными показателями // Сб. статей, посвящ. 60-летию со дня рождения проф. В.Г. Спринджука, 1997. С. 75-77.

[25] **Макаров Е.К., Попова С.Н.** О локальной управляемости характеристических показателей Ляпунова системы с некратными показателями // Дифференц. уравнения, 1997. Т. 33, № 4. С. 495-499.

[26] **Оленчиков Д.М.** Нестандартный анализ дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1995. Вып. 1. С 3-50.

[27] **Оленчиков Д.М.** Показатели Ляпунова импульсных систем //Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1996. Вып. 2. С 69-84.

[28] **Оленчиков Д.М.** Импульсное управление показателями Ляпунова //Дифференц. уравнения, 1997. Т. 33, № 11. С. 1576.

[29] **Оленчиков Д.М.** Импульсное управление показателями Ляпунова. I // Фундамент. и прикл. математика, 1999 (в печати).

[30] **Оленчиков Д.М.** Импульсное управление показателями Ляпунова. II // Фундамент. и прикл. математика, 1999 (в печати).

[31] **Kurzweil J.** Generalised ordinary differential equations // Czechosl. Math. J. 1958. Vol. 8, № 1. P. 360-388.

[32] **Юсиф-Заде М.Г.** О согласованности для линейных уравнений параболического типа // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1998. Т.15, вып. 4. С 81-104.

[33] **Макаров Е.К., Попова С.Н.** О глобальной управляемости полной совокупности ляпуновских инвариантов двумерных линейных систем // Дифференц. уравнения, 1999. Т. 35, № 1. С. 97-106.

[34] **Гайшун И.В.** Существование канонических форм линейных нестационарных систем управления относительно экспоненциальной группы // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 6. С. 727-734.

[35] **Гайшун И.В.** Управляемость характеристическими векторами линейных нестационарных систем // Дифференц. уравнения, 1999. Т 35, № 1. С. 24-29.

[36] **Родионова А.Г., Тонков Е.Л.** О непрерывности функции быстродействия линейной системы в критическом случае // Изв. вузов. Математика, 1993. Т. 372, № 5. С. 101-111.

[37] **Миллионщиков В.М.** Доказательство достижимости центральных показателей линейных систем // Сиб. мат. журн. 1969. Т.10, № 1. С.99-104.

[38] **Миллионщиков В.М.** Грубые свойства линейных систем дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения, 1969, Т.5, № 10, С.1775-1784.

[39] **Шин Д.** О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка // Мат. сб. 1940. Т. 7(49). С. 479-532.

[40] **Дерр В.Я.** Неосцилляция решений квазидифференциального уравнения // Нелинейн. колебания и теорет. упр. Ижевск, 1982. Вып. 4. С. 52-61.

[41] **Тонков Е.Л.** К вопросу о неосцилляции линейной системы // Нелинейн. колебания и теорет. упр. Ижевск, 1982. Вып. 4. С. 62-74.

[42] **Дерр В.Я.** Неосцилляция решений линейного квазидифференциального уравнения // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. Ижевск, 1999. Т. 16, № 1. С. 3–105.

[43] **Красовский Н.Н.** Теория управления движением. Линейные системы М.: Наука, 1970, 475 с.

[44] **Тонков Е.Л.** Управляемость нелинейной системы по линейному приближению // Прикл. математика и механика, 1974. Т.38, № 4. С. 599–606.

[45] **Тонков Е.Л.** Равномерная локальная управляемость и стабилизация нелинейной рекуррентной системы // Дифференц. уравнения, 1982. Т.18, № 5. С. 908–910.

[46] **Миллионщиков В.М.** О связи между устойчивостью характеристических показателей и почти приводимостью систем с почти периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1967. Т.3, № 12. С.2127-2134.

[47] **Окстоби Дж.** Мера и категория. М.: Мир, 1974. 176 с.