Ис. Ньютонъ

Математическія Начала Натуральной Философіи

ПЕРЕВОД СЪ ЛАТИНСКАГО
СЪ ПРИМЕЧАНІЯМИ И ПОЯСНЕНІЯМИ

А. Н. Крылова

Флота Генерала, Заслуженнаго Профессора Николаевской Морской Академіи,
Ординарного Академика Императорской Академіи Наукъ

К н и г и II и III

(Отдельный оттискъ изъ «Известій» Николаевской Морской Академии, вып. V)

ПЕТРОГРАДЪ
Типографія М. М. Стасюлевича. Вас. остр., 5 л., 28
1916

Это демонстрационная версия!

От составителя

Это издание является перепечаткой страниц 376–388 из книги

> И.Ньютон. *Математические начала натуральной философии.* Перевод с латинского А.Н.Крылова. Книги II и III. Петроград, тип. М.М.Стасюлевича, 1916.

Работа выполнена в рамках проекта “Классические задачи вариационного исчисления”[1], раздел “Аэродинамическая задача Ньютона”[2].

При переводе в электронный вид буква “и с точкой” (і) заменена на “и”, буква “ять” заменена на “е”, убраны твердые знаки в конце слов. Нижняя точка “.” как знак умножения заменена на центральную точку “·”. Исправлены очевидные опечатки. Номера подстрочных примечаний (примечания и пояснения А.Н.Крылова) и номера рисунков совпадают с номерами в оригинале. Замечания на полях добавлены мной (*А.И.*).

Я буду благодарен всем, кто сообщит об замеченных опечатках и неточностях (адрес электронной почты: `iagsoft@imm.uran.ru`).

Составитель выражает благодарность Г.Ф.Корниловой и Н.Н.Моргуновой[3] за помощь в “борьбе” с LaTeX’ом. А также Институту математики и механики[4] УрО РАН на чьей технике производились работы.

А.Г.Иванов[5]

О Т Д Е Л VII.

О движении жидкостей и сопротивлении брошенных тел.

Предложение XXXII. Теорема XXVI.

Пусть две материальныя системы подобны между собою и состоят из одинаковаго числа подобным образом расположенных частиц, причем каждая частица одной системы подобна, и масса ея пропорциональна массе частицы ей соответствующей другой системы, и плотности частиц находятся в

[1] http://home.imm.uran.ru/iagsoft/vari_.html

[2] http://home.imm.uran.ru/iagsoft/Newton/index_.html

[3] http://tex.imm.uran.ru/

[4] http://www.imm.uran.ru/

[5] http://home.imm.uran.ru/iagsoft/I_.html

постоянном отношении; пусть эти частицы по прошествии пропорциональных промежутков времени начинают двигаться подобным образом (принадлежащия одной системе друг по отношению к другу и принадлежащия другой также друг относительно друга); если при этом частицы той же системы не касаются друг друга, за исключением моментов соударений, взаимно не притягиваются и не отталкиваются ни с какими силами, за исключением ускорительных сил обратно пропорциональных линейным размерениям соответствующих частиц и прямо пропорциональных квадратам их скоростей, то я утверждаю, что частицы каждой из этих систем будут продолжать находиться в конце пропорциональных промежутков времени в подобном друг относительно друга движении.

...

Следствие 1. Таким образом, если два каких-либо подобных между собою тела, расположенных сходственнымъ образом по отношению к соответствующим частицам, начнут по прошествии пропорциональных промежутков времени двигаться подобным образом и если их величины и плотности находятся в том же отношении, как величины и плотности соответствующих частиц, то в конце пропорциональных промежутков времени эти тела будут продолжать двигаться подобным образом. Ибо все, относящееся до частиц обеих систем в равной мере относится и до больших частей их.

...

Предложение XXXIII. Теорема XXVII.

→ Это утверждение сделано Ньютоном не для редкой среды, а для более общего случая — идеального газа. *(А.И.)*

При тех же предположениях я утверждаю, что бóльшия части систем будут испытыват сопротивления пропорциональныя: квадратам их скоростей, квадратам линейных размерений и плотностям частей систем.

Сопротивление происходит частию от центробежных и центростремительных сил взаимодействия между частицами, частию от ударов частиц о большия части систем и отражений от них.

...

Следствие 1. Поэтому, если обе эти системы представляют две упругих жидкости в роде воздуха, и частицы их находятся в относительном покое для каждой системы, два же подобных тела, по величине и плотности пропорциональных частицам жидкости и расположенных сходственным образом между этими частицами ея, будут брошены как бы то ни было по линиям, также сходственно расположенным, то, так как ускорительныя силы взаимодействий между частицами обратно пропорциональны диаметрам брошенных тел и прямо пропорциональны квадратам их скоростей, тела эти в пропорциональные промежутки времени будут возбуждать подобныя движения в жидкости и будут описывать подобныя пространства, относящиеся между собою как линейныя размерения этих тел.

...

→ Утверждение обосновывающее примененимость модели редкой среды для случая больших скоростей движения. *(А.И.)*

Следствие. 3. Сопротивление тела движущагося весьма быстро во всякой упругой жидкости почти такое же, как если бы частицы жидкости были лишены отталкивательных сил; в упругих жидкостях сила упругости происходит от отталкивательных сил частиц и надо, чтобы скорость была настолько велика, чтобы эти силы не имели достаточно времени, чтобы проявить свое действие.

...

Следствие 6. Все изложенное выше имеет место в таких упругих жидкостях, коих сила упругости происходит от отталкивательных сил между частицами. Если же эта сила происходит от чего-либо иного, как напр., от расположения частиц на подобие шерсти или ветвей дерева, или от всякой иной причины, по которой относительныя движения становятся менее свободными, то сопротивление вследствие меньшей текучести жидкости станет больше, нежели в предыдущих случаях.

Предложение XXXIV. Теорема XXVIII.

Если шар и цилиндр, описанные на равных диаметрах, движутся с одинаковой скоростью по направлению оси цилиндра, в редкой среде состоящей из равных частиц свободно расположенных в равных друг от друга разстояниях, то сопротивление шара вдвое меньше сопротивления цилиндра.

...

Затем на движение шара по направлению линии падения FB или AC действительною оказывается от полной силы удара направленной по BC лишь слагающая по направлению FB, относящаяся к этой полной силе как BE к BC. Из перемножения этих отношений следует, что действующая по направлению FB слагающая силы удара частицы на шар, относится к действующей по этому же направлению слагающей силы удара частицы на цилиндр, как BE^2 относится к BC^2. Поэтому, если по перпендикуляру bE к основанию NAO цилиндра отложить длину bH так, чтобы было $bH : BE = BE : CB$, то отношение bH к bE будет равно отношению вышеупомянутых действий силы удара на шар и на цилиндр, следовательно объем, занятый всеми прямыми bH, находится к объему, занятому прямыми bE в том же отношении, как действие всех частиц на шар к действию их на цилиндр [161])

Но первый объем есть параболоид, коего вершины C, ось CA и параметр CA, второй же объем есть цилиндр около этого параболоида описанный, известно, что объем параболоида равен половине объема описаннаго цилиндра. Следовательно, полная сила действия среды на шар равна половине таковой же силы на цилиндр, поэтому, если бы частицы среды находились в покое, цилиндр же и шар двигались с одинаковою скоростью, сопротивление шара было бы вдвое меньше сопротивления цилиндра.

Поучение.

По этому способу можно сравнивать сопротивления и других фигур между собою, а также находить те, которыя наиболее приспособлены к продолжению своего движения в сопротивляющейся среде. Так, если на круговом основании $CEBH$ (фиг. 169), описанном из центра O радиусом OC требуется построить такой усеченный конус $CBFG$ с высотою OD, коего сопротивление было бы меньше сопротивления всякаго другого усеченнаго конуса, построеннаго на том же основании и высоте и движущагося по оси OD в сторону D, то, разделив высоту OD в точке Q пополам, продолжи OQ до S так, чтобы было

$$QS = QC$$

S и будет вершиною искомаго конуса, который усекается [162]).

[161]) В этом предложении, как видно, попутно устанавливается закон пропорциональности сопротивления испытываемаго элементом поверхности квадрату синуса угла встречи.

...

Вычисление отношения сопротивления шара к сопротивлению описаннаго около него цилиндра, коего производящия параллельны направлению движения, заключает еще неявно предположение, что число ударяющих частиц пропорционально величине элемента поверхности или его проекции на плоскость перпендикулярную к направлению движения, ибо лишь при этом предположении сопротивления шара и цилиндра представляются указанными объемами параболоида и цилиндра с таким же основанием и высотою; это предположение и оговорено в условии теоремы, — что частицы распределены равномерно.

[162]) Обозначим OD через $2a$, OC через r, OS через x и через k постоянный множитель. Сопротивление испытываемое усеченным конусом при движении по направлению своей оси слагается из сопротивления на малое основание, пропорциональное площади этого основания, и проекции на ось сопротивления действующаго на боковую поверхность; на каждый элемент этой поверхности действует нормальное сопротивление пропорциональное величине этого элемента и квадрату синуса угла встречи

Здесь же заметим мимоходом, что угол CSB (фиг. 170) всегда острый, поэтому, если тело $ADBE$ образуется обращением эллипса или овала $ADBE$ около оси AB и к производящей кривой проводятся касательныя FG, GH, HI в точках F, B и I так, что GH перпендикулярно к оси AB в точке касания B, другия же две касательныя FG и HI составляют с GH углы FGB и IHB равные $135°$, то тело, образуемое обращением фигуры $ADFGHIE$ около той же оси AB будет испытывать меньшее сопротивление, нежели первоначальное при движении вдоль своей оси точкою B вперед. Я считаю, что это предложение может быть не безполезно при построении судов [163]).

$\longrightarrow$ Собственно задача об обтекании снаряда сформулирована и решена Ньютоном в этом абзаце *(А.И.)*

Когда же фигура $DNFG$ будет кривою такого рода, что если из любой ея точки N опустить на ось перпендикуляр NM и из заданной точки G провести прямую GR параллельную касательной к кривой в точке N и пересекающую ось в точке R, то имеет место пропорция:

$$MN : GR = GR^3 : BR \cdot GB^2$$

тогда тело, образующееся при обращении этой кривой около оси AB при движении в вышеупомянутой редкой среде в направлении от A к B будет испытывать меньшее сопротивление, нежели всякое иное тело вращения, описанное на той же длине и той же наибольшей ширине [164]).

равнаго CSO, таким образом сумма проекций всех этих элементарных сопротивлений на ось получится если умножить на $\sin^2 CSO$ сопротивление, которое действовало бы на кольцевую площадь равную разности площадей большого и малаго оснований конуса.

…

[163]) Доказательство этого свойства требует уже соображений составляющих как бы переходную ступень к тем, которыя теперь относятся к вариационному исчислению. Прежде всего заместим (черт. 170а), что когда высота a отсека конуса приближается к нулю, то x приближается к r и угол составляемый производящей с осью конуса приближается к $45°$. Таким образом, если взять безконечно-тонкий усеченный конус, то проведя производящую MS под углом $45°$

…

[164]) Это утверждение Ньютона всецело относится к вариационному исчислению, и приведенный им ответ на вопрос о теле вращения представляющаго наименьшее сопротивление указывает, что им была решена первая задача в этой области, хотя он и не привел метода, которым это решение получено.

…

Обозначая через k коэффициент сопротивления, получим, что полное сопротивле-

Предложение XXXV. Задача VII.

Предполагая, что редкая среда состоит из равных, весьма малых, покоющихся частиц, свободно расположенных в равных друг от друга разстояниях, требуется определить сопротивление, испытываемое равномерно движущимся в такой среде шаром.

Случай 1. Вообразим, что цилиндр, диаметр и высота коего равны диаметру шара, движется с такою же скоростью, как и шар по направлению своей оси в той же среде. Положим, что частицы среды, на которыя наталкивается цилиндр или шар, отражаются с наибольшею силою. По предыдущему предложению сопротивление шара вдвое меньше сопротивления цилиндра, объем шара составляет $\frac{2}{3}$ объема цилиндра, и цилиндр ударяя частицы нормально и отражая их с наибольшею силою, сообщает им скорость вдвое бóльшую своей собственной, поэтому в продолжение того времени, как он равномерно проходит путь, равный половине длины своей оси, он сообщит частицам количество

ние на поверхность выражается интегралом:

$$k\int\limits_{x_0}^{x} \frac{yy'^3}{1+y'^2}\,dx.$$

Разыскание minimum'а этого интеграла, по правилам вариационного исчисления приводит к уравнению:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\cdot\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \tag{1}$$

где

$$F = \frac{yy'^3}{1+y'^2}$$

...

Ньютон не счел нужным представить свое решение в аналитической форме, т.-е. положив $y' = p$ выразить в функции p не только ординату y

$$y = \frac{1}{4}a\cdot\frac{(1+p^2)^2}{p^3} \tag{2}$$

но и абсциссу x. Заметив, что $dx = \dfrac{dy}{p}$ имеем:

$$x = \int\frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int\frac{y\,dp}{p^2} = \frac{1}{4}a\cdot\frac{(1+p^2)^2}{p^4} + \frac{1}{4}a\int\frac{(1+p^2)^2\cdot dp}{p^5} =$$

$$= \frac{1}{4}a\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{p^4} + \frac{1}{p^2} + \log p\right] + C_1 \tag{3}$$

где C_1 постоянная произвольная, определяемая в разсматриваемом случае из условия, что при $p=1$, x должно равняться x_0.

движения, так относящееся к количеству движения его самого, как плотность жидкости относится к плотности этого цилиндра. Шар сообщит частицам такое же количество движения в продолжение того времени, в которое он равномерно проходит путь, равный своему диаметру; в то же время, как он проходит $\frac{2}{3}$ своего диаметра, сообщит частицам количество движения, относящееся к полному количеству движения его самого как плотность среды к плотности шара. Поэтому шар испытывает сопротивление так относящееся к силе, которая могла бы поглотить или образовать полное его количество движения, в продолжение того времени, как шар проходит равномерно путь, равный двум третям своего диаметра, как плотность среды относится к плотности шара.

...

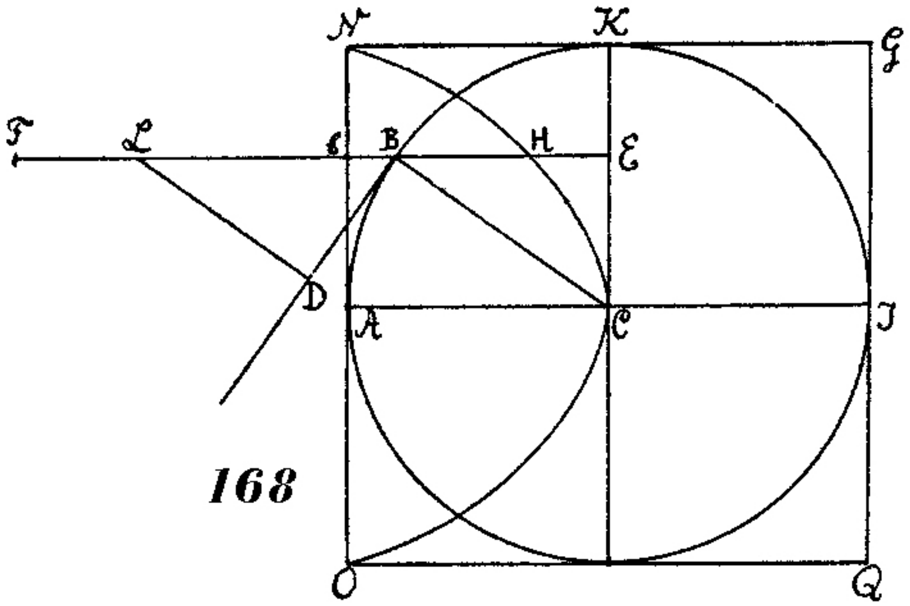
Случай 3. Предположим теперь, что частицы среды обладают некоторою силою отражения, которая меньше наибольшей и не равна нулю, но средняя между этою наибольшею и нулевой, тогда и сопротивление шара будет средним и находящимся в таком же отношении к сопротивлению в первом и во втором случае.

Следствие 1. Таким образом, если шар и частицы безконечно тверды и лишены всякой упругости, а значит, и всякой силы отражения, то сопротивление шара относится к силе, которая может поглотить или образовать полное его количество движения в продолжение того времени, в которое шар проходит путь равный четырем третям своего диаметра, как плотность среды относится к плотности шара.

...

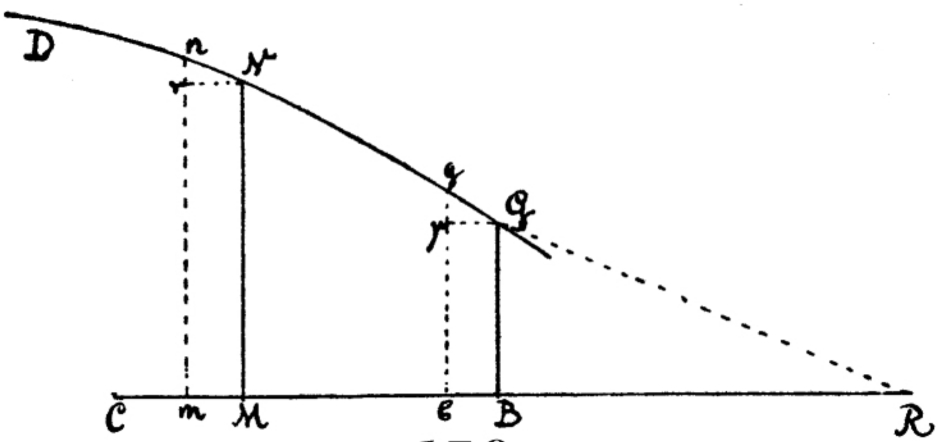
Следствие 7. Таким образом, если шар в течение времени T, предполагая, что сопротивление R остается постоянным, утрачивает полное свое количество движения M, то этот шар в продолжение времени t утратит вследствие сопротивления среды, уменьшающегося вместе со скоростью пропорционально квадрату ея, количество движения равное $\frac{Mt}{T+t}$ и остающаяся его часть составит $\frac{M \cdot T}{T+t}$ при этом шар пройдет путь, длина коего относится к пути, описываемому во время t равномерно с такою скоростью, при которой количество движения равно M, как $2{,}302585092994 \cdot \log \frac{T+t}{T} : \frac{T}{t}$ ибо отношение площади $BCFF$ гиперболы к площади $BCGE$ равно такой величине.

— Рисунки I —



168

...



170в

— Рисунки II —