

Содержание

1	Введение.	2
2	Формулировка основного результата.	8
3	Редукция к экстремальной задаче для полиномов Якоби. Оценка снизу.	10
4	Неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L^2_{\alpha, -1/2}$.	12
5	Двойственная задача.	13
6	Некоторые свойства обобщенного сдвига.	14
7	Оценка сверху.	18
8	Доказательство теоремы 2.1.	21
9	Неравенство Джексона–Стечкина в L^2 на сфере и проективных пространствах.	21

Статья опубликована в журнале:

Известия РАН. Серия математическая. 1998. Т. 68, N 6. С. 27–52;

English translation: Russian Acad. Sci. Math. Izv., 68 (1998), no. 6. УДК 517.518.837

ТОЧНОЕ НЕРАВЕНСТВО ДЖЕКСОНА–СТЕЧКИНА ДЛЯ L^2 – ПРИБЛИЖЕНИЙ НА ОТРЕЗКЕ С ВЕСОМ ЯКОБИ И ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ*

А. Г. Бабенко

27 марта 2000 г.

1 Введение.

В этой работе доказано точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 на отрезке с весом Якоби, и, как следствие, получены родственные неравенства для функций многих переменных, заданных на проективных пространствах. Указанный результат для приближений на отрезке, в основном, был анонсирован ранее автором в [2].

Пусть $\alpha > -1$, $\beta > -1$ и $R_k = R_k^{\alpha, \beta}$ – алгебраические многочлены Якоби порядка $k = 0, 1, 2, \dots$, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ с весом $(1 - z)^\alpha(1 + z)^\beta$ (см. [3, гл.IV])

$$\int_{-1}^1 R_k(z)R_l(z)(1 - z)^\alpha(1 + z)^\beta dz = 0, \quad k \neq l, \quad k, l \in \mathbf{Z}^+,$$

и нормированные условием $R_k(1) = 1$, $k \in \mathbf{Z}^+$. Как известно (см. [4, с.75]),

*Работа выполнена при финансовой поддержке фонда INTAS – International Association for the Promotion of Cooperation with Scientists from the Independent States of the Former Soviet Union, грант INTAS-94-4070.

они удовлетворяют рекуррентному соотношению при $k=1,2,\dots$

$$\begin{aligned} & \frac{2(k+\alpha+1)(k+\alpha+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta+2)} R_{k+1}(z) = \\ & = \left(z + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta+2)} \right) R_k(z) - \frac{2k(k+\beta)}{(2k+\alpha+\beta)(2k+\alpha+\beta+1)} R_{k-1}(z), \end{aligned}$$

$$R_0(z) = 1, \quad R_1(z) = \frac{\alpha - \beta + (\alpha + \beta + 2)z}{2(\alpha + 1)}.$$

Ясно, что система косинус-полиномов Якоби

$$\phi_k(x) = \phi_k^{\alpha,\beta}(x) = R_k^{\alpha,\beta}(\cos x), \quad \phi_k(0) = 1, \quad k \in \mathbf{Z}^+, \quad (1.1)$$

является ортогональной на отрезке $[0, \pi]$ с весом $\left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1}$

$$\int_0^\pi \phi_k(x) \phi_l(x) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx = 0, \quad k \neq l, \quad k, l \in \mathbf{Z}^+.$$

Приведем известные примеры таких полиномов (см. [3, с.72, (4.1.7), (4.1.8)])

$$\phi_k^{-1/2,-1/2}(x) = \cos kx; \quad \phi_k^{1/2,1/2}(x) = \frac{\sin(k+1)x}{(k+1)\sin x};$$

$$\phi_k^{1/2,-1/2}(x) = \frac{\sin \frac{2k+1}{2}x}{(2k+1)\sin \frac{x}{2}}, \quad \phi_k^{-1/2,1/2}(x) = \frac{\cos \frac{2k+1}{2}x}{\cos \frac{x}{2}}.$$

Косинус-полиномы Якоби обладают следующими замечательными свойствами (см. [3, с.71, (4.1.5)]): при любых $\alpha > -1$, $k \in \mathbf{Z}^+$ справедливы равенства

$$\phi_k^{\alpha,-1/2}(x) = \phi_{2k}^{\alpha,\alpha}\left(\frac{x}{2}\right), \quad \phi_k^{\alpha,1/2}(x) = \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} \phi_{2k+1}^{\alpha,\alpha}\left(\frac{x}{2}\right). \quad (1.2)$$

Обозначим через $L^2 = L_{\alpha,\beta}^2$ пространство вещественных измеримых четных 2π -периодических функций вида $F(x) = f(\cos x)$, $x \in \mathbf{R}$, со скалярным произведением

$$(F, G) = \int_0^\pi F(x)G(x) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx$$

и нормой $\|F\| = (F, F)^{1/2}$. Наилучшим приближением функции $F \in L^2$ пространством

$$C_{n-1} = \left\{ G : G(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos kx, \quad a_k \in \mathbf{R} \right\}$$

косинус-полиномов порядка $n - 1$ называется величина

$$E_{n-1}(F) = \min\{\|F - G\| : G \in C_{n-1}\}. \quad (1.3)$$

Для оценки сверху этой величины нам понадобится важное обобщение понятия сдвига (см. [5]) произвольной функции $F \in L^2$, основанное на ее разложении в ряд Фурье по косинус-полиномам Якоби

$$F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu} \phi_{\nu}(x), \quad F_{\nu} = \frac{(F, \phi_{\nu})}{(\phi_{\nu}, \phi_{\nu})}. \quad (1.4)$$

А именно, оператором (обобщенного) сдвига с шагом $t \in \mathbf{R}$ называется линейный оператор T_t , который действует на функции $F \in L^2$ вида (1.4) по закону

$$T_t F(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} F_{\nu} \phi_{\nu}(t) \phi_{\nu}(x). \quad (1.5)$$

Поскольку $\phi_0(t) = 1$, то, как нетрудно заметить, оператор сдвига (с любым фиксированным шагом $t \in \mathbf{R}$) переводит постоянные функции в себя, например, $T_t 1 = 1$. Кроме того, известно (см. [3, с.175, (7.32.2)]), что в случае

$$\alpha \geq \beta > -1, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2} \quad (1.6)$$

косинус-полиномы Якоби $\phi_k = \phi_k^{\alpha, \beta}$ удовлетворяют следующим соотношениям

$$\max_{t \in \mathbf{R}} |\phi_k(t)| = \phi_k(0) = 1, \quad k \in \mathbf{Z}^+. \quad (1.7)$$

Следовательно, в этом случае норма оператора T_t , как оператора из L^2 в L^2 , равна единице. Поэтому применима схема Грюнвальда – Летникова [6], [7] (см. также [8, §\nobreakspace 20], [9], [10]) построения соответствующего разностного оператора (вещественного) порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbf{R}$

$$\Delta_t^r = (I - T_t)^{r/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r/2}{k} T_t^k, \quad (1.8)$$

где I – тождественный оператор, $\binom{a}{0} = 1$, $\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!}$, $k = 1, 2, \dots$, – биномиальные коэффициенты. Модулем непрерывности порядка $r > 0$ функции $F \in L^2$ называется следующая функция переменного $\tau > 0$

$$\omega_r(F, \tau) = \sup\{\|\Delta_t^r F\| : |t| \leq \tau\}.$$

Следующая взаимосвязь между модулями непрерывности различных порядков получается путем повторения рассуждений, содержащихся в работах С.Б.Стечкина [11, лемма 2], Х.П.Рустамова [9, с.130, неравенство (1.8)

и его обоснование]. Пусть $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $\tau > 0$. Тогда для любой функции $F \in L^2_{\alpha, \beta}$ выполняется неравенство

$$\omega_q(F, \tau) \leq 2^{(q-r)/2} \omega_r(F, \tau), \quad 0 < r < q. \quad (1.9)$$

Кроме того, из определений (1.8), (1.5) и равенства Парсеваля следует, что для каждой функции $F \in L^2_{\alpha, \beta}$ вида (1.4) справедливо соотношение

$$\|\Delta_t^r F\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} F_k^2 \{1 - \phi_k(t)\}^r, \quad t \in \mathbf{R}, \quad r > 0, \quad (1.10)$$

из которого следует, что при $r > 0$

$$\omega_r(F, \tau) \leq \omega_r(F, \pi), \quad 0 < \tau \leq \pi; \quad \omega_r(F, \tau) = \omega_r(F, \pi), \quad \tau \geq \pi. \quad (1.11)$$

Зафиксируем числа α, β , удовлетворяющие условиям (1.6), а также числа $\tau > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbf{N}$ и рассмотрим классическую задачу о точной константе $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r)$ в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2 = L^2_{\alpha, \beta}$

$$E_{n-1}(F) \leq \mathcal{K} \omega_r(F, \tau), \quad F \in L^2, \quad (1.12)$$

т.е. задачу о вычислении величины

$$\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) = \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(F)}{\omega_r(F, \tau)} : F \in L^2, \quad F \neq \text{const} \right\}. \quad (1.13)$$

Величину (1.13) мы будем иногда называть константой Джексона–Стечкина. Эта задача имеет большую историю, информация о качественной картине в этой области (вопросы ограниченности констант) содержится в работах М.К.Потапова [12], Х.П.Рустамова [10]. Что касается точных результатов в этой тематике, то соответствующие исторические сведения можно найти в работе автора [1]. Ниже мы перечислим лишь те из них, которые имеют непосредственное отношение к теме исследований данной статьи. Хотя некоторые авторы приводимых ниже результатов применяли иные модули непрерывности, но при доказательстве они переходили к задачам, которые возникают и в данной работе. Учитывая это обстоятельство, мы сформулируем указанные результаты в обозначениях, принятых здесь.

Точную константу в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L^2_{-1/2, -1/2}$ нашел Н.И.Черных в 1967 году [13]

$$\mathcal{K}_n^{-1/2, -1/2}(\tau, r) = \sqrt{\frac{2^r}{\binom{2r}{r}}}, \quad \tau \geq \frac{2\pi}{n}, \quad n > r, \quad r = 2, 3, \dots \quad (1.14)$$

Для случая $r = 1$ он получил [14], [15] более тонкое утверждение относительно поведения величины $\mathcal{K}_n^{-1/2, -1/2}(\tau, 1)$ по τ . Подробнее, Н.И.Черных нашел точку $\tau = \tau_n^{-1/2, -1/2}(1) = \pi/n$, начиная с которой указанная величина выходит на свой глобальный минимум, равный единице

$$\mathcal{K}_n^{-1/2, -1/2}(\tau, 1) = 1, \quad \tau \geq \frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots; \quad (1.15)$$

$$\mathcal{K}_n^{-1/2, -1/2}(\tau, 1) > 1, \quad 0 < \tau < \frac{\pi}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots. \quad (1.16)$$

Положим

$$\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(r) = \min_{\tau > 0} \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r). \quad (1.17)$$

Используя определение (1.13) и свойство (1.11), легко заметить, что

$$\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(r) = \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\pi, r) = \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r), \quad \tau \geq \pi. \quad (1.18)$$

Сейчас естественно ввести следующее

Определение 1.1 Точкой Черныха в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L_{\alpha, \beta}^2$ называется точная нижняя грань положительных значений $\tau > 0$, для которых величина $\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r)$ (как функция переменной τ) принимает свое минимальное значение $\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(r)$

$$\tau_n^{\alpha, \beta}(r) = \inf\{\tau > 0 : \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) = \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(r)\}. \quad (1.19)$$

Следующий существенный шаг в этом направлении был сделан В.А.Юдиным [16], который получил точное неравенство Джексона (с первым модулем непрерывности) в пространстве $L^2(\mathbf{T}^m)$ функций на многомерном торе \mathbf{T}^m , $m \geq 2$. Ряд точных неравенств Джексона–Стечкина между наилучшим среднеквадратичным приближением функции (одной или нескольких переменных) и значением ее r -го модуля непрерывности в одной точке был получен в работах [17], [18], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [1], [25], [?]Gorbachev), [27]. В частности, в работе автора [1, теоремы 2.1, 2.2, замечания 2.1 – 2.5] содержится результат (см. теорему 1.1 ниже), относящийся к ультрасферическому случаю задачи (1.13) о точной константе в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L_{\alpha, \alpha}^2$, $\alpha \geq -1/2$, который тесно связан с аналогичной задачей в пространстве $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ функций на единичной сфере \mathbf{S}^{m-1} вещественного евклидова пространства \mathbf{R}^m размерности $m \geq 2$.

При $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $x_n^{\alpha, \beta}$ первый положительный нуль косинус-полинома Якоби $\phi_n^{\alpha, \beta}$ (см. (1.1))

$$x_n^{\alpha, \beta} = \min\{x > 0 : \phi_n^{\alpha, \beta}(x) = 0\}. \quad (1.20)$$

Теорема 1.1 Пусть $n = 1, 2, \dots$. Тогда выполняются следующие утверждения

(А) при $\alpha \geq -1/2$ для каждой функции $F \in L^2_{\alpha, \alpha}$, $F \not\equiv \text{const}$ справедливы неравенства

$$E_{n-1}(F) < \omega_r(F, 2x_n^{\alpha, \alpha}), \quad r \geq 1, \quad (1.21)$$

$$E_{n-1}(F) < 2^{(1-r)/2} \omega_r(F, 2x_n^{\alpha, \alpha}), \quad 0 < r < 1; \quad (1.22)$$

(В) при $\alpha > -1/2$ для любого $\tau \in (0, \pi)$ существует последовательность функций G_k , $k = 1, 2, \dots$, из $L^2_{\alpha, \alpha}$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(G_k)}{\omega_r(G_k, \tau)} \geq 1, \quad r > 0.$$

(С) при $\alpha > -1/2$ существует последовательность функций G_k , $k = 1, 2, \dots$, из $L^2_{\alpha, \alpha}$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(G_k)}{\omega_r(G_k, \pi)} \geq 1, \quad 0 < r \leq 1.$$

Замечание 1.1.

1) Пункт (В) теоремы 1.1 принадлежит В.В.Арестову, который на самом деле установил более общее утверждение [24, теорема 1], [1, лемма 4.2].

2) Для $\alpha = -1/2$, $r = 1$ утверждения теоремы 1.1 получены Н.И.Черных [14].

3) При $\alpha = -1/2$, $r > 1$ неравенство (1.21) доказано В.В.Шалаевым [22].

4) В случаях $\alpha = 0, 1/2$, $n \geq 1, r \geq 1$ В.Ю.Попов получил неравенство [24, (6.4), (6.6)]

$$E_{n-1}(F) < \omega_r \left(F, \frac{2\pi}{n+1} \right), \quad F \in L^2, \quad F \not\equiv \text{const},$$

которое при $\alpha = 0$, $n = 1$, $r \geq 1$ и $\alpha = 1/2$, $n \geq 1$, $r \geq 1$ совпадает с неравенством (1.21), а при $\alpha = 0$, $n \geq 2$, $r \geq 1$ неравенство (1.21) уточняет указанный результат В.Ю.Попова, т.к. $2x_n^{0,0} < 2\pi/(n+1)$ (см. [3, с.147, (6.6.4)]).

5) В силу известного свойства (1.9) модуля непрерывности первое неравенство в пункте (А) влечет второе. В работе [1] содержится также иное доказательство неравенства (1.22).

Замечание 1.2. Ниже (см. первое утверждение следствия 4.1) будет показано, что утверждение (В) теоремы 1.1 выполняется и при $\tau = \pi$ (а значит, и при любом $\tau > 0$).

Предложение 1.1 Если $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $r > 0$, $n \in \mathbf{N}$, то с помощью функции $\phi_n^{\alpha,\beta}(x)$ легко показать (см. (1.10), (3.1)), что при $0 < \tau < x_n^{\alpha,\beta}$ точная константа $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)$ в неравенстве (1.12) будет строго больше единицы

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) > 1, \quad 0 < \tau < x_n^{\alpha,\beta}.$$

Теорема 1.1, замечание 1.2 и предложение 1.1 позволяют локализовать точку Черныха (1.19) в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L_{\alpha,\alpha}^2$, при $\alpha > -1/2$, $r \geq 1$.

Следствие 1.1 Пусть $\alpha > -1/2$. Тогда точная константа в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L_{\alpha,\alpha}^2$ удовлетворяет соотношениям

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\alpha}(\tau, r) > 1, \quad 0 < \tau < x_n^{\alpha,\alpha}, \quad r > 0, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$\mathcal{K}_n^{\alpha,\alpha}(\tau, r) = 1, \quad \tau \geq 2x_n^{\alpha,\alpha}, \quad r \geq 1, \quad n \in \mathbf{N};$$

и потому имеют место оценки

$$x_n^{\alpha,\alpha} \leq \tau_n^{\alpha,\alpha}(r) \leq 2x_n^{\alpha,\alpha}, \quad r \geq 1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

2 Формулировка основного результата.

В данной работе найдена точная константа $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)$ в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L_{\alpha,\beta}^2$ при $\alpha > \beta \geq -1/2$, $r \geq 1$, $\tau \geq 2x_n^{\alpha,\beta}$, $n \geq \max \left\{ 2, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right\}$ при $\beta > -1/2$, $n \geq 1$ при $\beta = -1/2$, и локализована точка Черныха (1.19) в этом неравенстве. Приведена многомерная интерпретация этого результата на примере L^2 -приближений функций, заданных на проективных пространствах, а также дополнен результат В.В.Арестова об оценке снизу для константы Джексона – Стечкина на многомерной сфере.

Теорема 2.1 Пусть $\alpha > \beta \geq -1/2$. Тогда выполняются следующие утверждения

(А) для каждого натурального $n \geq \max\left\{2, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2}\right\}$ и произвольной функции F из пространства $L_{\alpha, \beta}^2$ справедливы неравенства

$$E_{n-1}(F) \leq \omega_r(F, 2x_n^{\alpha, \beta}), \quad r \geq 1, \quad (2.1)$$

$$E_{n-1}(F) \leq 2^{(1-r)/2} \omega_r(F, 2x_n^{\alpha, \beta}), \quad 0 < r < 1; \quad (2.2)$$

(В) для каждого натурального числа $n \in \mathbf{N}$ и любого положительного числа $\tau > 0$ существует последовательность функций G_k , $k \in \mathbf{N}$, из $L_{\alpha, \beta}^2$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(G_k)}{\omega_r(G_k, \tau)} \geq 1, \quad r > 0.$$

Замечание 2.1. Пункты 1), 5) замечания 1.1 остаются в силе и для теоремы 2.1.

Замечание 2.2. Ниже (см. следствие 4.1) будет показано, что при $\alpha > \beta = -1/2$ утверждение (А) теоремы 2.1 справедливо для любого натурального $n \geq 1$.

Замечание 2.3. В случае $\alpha > \beta > -1/2$ утверждения теоремы 2.1 были анонсированы автором [2] в иной эквивалентной форме.

С помощью теоремы 2.1, замечания 2.2 и предложения 1.1 получаем

Следствие 2.1 Пусть $\alpha > \beta \geq -1/2$, $n \geq \max\left\{2, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2}\right\}$, $\tau \geq 2x_n^{\alpha, \beta}$. Тогда для точной константы (1.13) и точки Черныха (1.19) в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L_{\alpha, \beta}^2$ выполняются соотношения

$$\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) = 1, \quad r \geq 1; \quad (2.3)$$

$$1 \leq \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) \leq 2^{(1-r)/2}, \quad 0 < r < 1;$$

$$x_n^{\alpha, \beta} \leq \tau_n^{\alpha, \beta}(r) \leq 2x_n^{\alpha, \beta}.$$

Следствие 2.2 Пусть $\alpha > -1/2$, $n \in \mathbf{N}$, $\tau \geq \min\{\pi, 2x_n^{\alpha, -1/2}\}$. Тогда имеют место соотношения

$$\mathcal{K}_n^{\alpha, -1/2}(\tau, r) = 1, \quad r \geq 1;$$

$$1 \leq \mathcal{K}_n^{\alpha, -1/2}(\tau, r) \leq 2^{(1-r)/2}, \quad 0 < r < 1;$$

$$x_n^{\alpha, -1/2} \leq \tau_n^{\alpha, -1/2}(r) \leq \min\{\pi, 2x_n^{\alpha, -1/2}\}.$$

Доказательство теоремы 2.1 будет проведено поэтапно. Вначале мы покажем, как из результата В.В.Арестова [24, теорема 1], [1, лемма 4.2] и известных свойств полиномов Якоби следует оценка снизу для величины (1.13), а затем, применяя идеи, содержащиеся в работах Н.И. Черных [13], [14] и В.А.Юдина [16], по аналогии с тем, как это уже делалось в ультрасферическом случае в статье автора [1], построим вес (допустимую функцию в двойственной задаче), который даст нужную оценку сверху для искомой величины.

3 Редукция к экстремальной задаче для полиномов Якоби. Оценка снизу.

Пусть $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$. По стандартной схеме (см., например, [1]), с помощью равенства Парсеваля, получаем, что для любой функции $F \in L^2_{\alpha,\beta}$ квадрат величины (1.3) ее наилучшего среднеквадратичного приближения косинус-полиномами порядка $n - 1$ вычисляется по формуле

$$E_{n-1}^2(F) = \sum_{k=n}^{\infty} F_k^2, \quad F_k = \frac{(F, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)}, \quad (3.1)$$

где $\phi_k = \phi_k^{\alpha,\beta}$, $k \in \mathbf{Z}^+$, — косинус-полиномы Якоби (1.1), а квадрат нормы ее разности порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbf{R}$ удовлетворяет равенству (1.10). Поэтому задача (1.13) сводится к следующей экстремальной задаче для косинус-полиномов Якоби. При фиксированных $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $\tau > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbf{N}$ найти наилучшую константу $K = K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)$ в неравенстве

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \leq K \max_{|t| \leq \tau} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k(t)\}^r, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \in \mathbf{N}. \quad (3.2)$$

Не трудно показать, что

$$K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) = \sup \left\{ \frac{\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k}{\max_{0 \leq t \leq \tau} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k(t)\}^r} : 0 < \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k < \infty, \rho_k \geq 0, k \geq n \right\}. \quad (3.3)$$

Обратим внимание читателя на то, что суммирование во всех суммах в (3.3) ведется по k , начиная с n , и это не есть опечатка. Очевидно также, что справедливо равенство

$$\{K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r)\}^2 = K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) \quad (3.4)$$

при $\alpha \geq \beta > -1, \alpha \geq -1/2, \tau > 0, r > 0, n \in \mathbf{N}$. Задачу (3.3) можно преобразовать к виду

$$K_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) = \sup \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k : \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k(t)\}^r \leq 1, t \in [0, \tau]; \rho_k \geq 0, k \geq n \right\}. \quad (3.5)$$

Видно, что (3.5) есть задача (бесконечномерного) линейного программирования. Такого рода задачи возникают и в других областях математики, например, при исследовании границ упаковок некоторых метрических пространств по схеме Дельсарта ([28], [29], [30], [4], [31, гл.9, 13, 14], [25]), оценок снизу мощности дизайнов (см. [32]), а также в теории чисел (см. [33], [34] и приведенную там библиографию).

Для оценки снизу величины (3.3) нам понадобится следующее утверждение, доказанное В.В.Арестовым [24, теорема 1], [1, лемма 4.2]. Ниже мы будем использовать стандартное обозначение $\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ равномерной нормы непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции f .

Лемма 3.1 (В.В.Арестов). Пусть на отрезке $[0, \tau]$, $\tau > 0$, задана система непрерывных функций ψ_k , $k \in \mathbf{N}$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $\psi_k(0) = 0$, $k \in \mathbf{N}$; 2) $\sup_{k \in \mathbf{N}} \|\psi_k\|_{C[0, \tau]} < \infty$; 3) для любого $\xi \in (0, \tau]$ выполняется неравенство

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \{ \max_{t \in [\xi, \tau]} \psi_k(t) \} \leq 1.$$

Тогда для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется функция

$$F(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \psi_k(t), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k = 1,$$

с неотрицательными коэффициентами $\rho_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$, такая, что

$$F(t) \leq 1 + \varepsilon, \quad t \in [0, \tau].$$

Следствие 3.1 Пусть $\alpha > \beta > -1, \alpha > -1/2, \tau > 0, r > 0, n \in \mathbf{N}$. Тогда для точной константы $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r)$ (см. (1.13)) в неравенстве Джексона–Стечкина (1.12) в пространстве $L_{\alpha, \beta}^2$ имеет место следующая оценка снизу

$$\mathcal{K}_n^{\alpha, \beta}(\tau, r) \geq 1. \quad (3.6)$$

Доказательство. Из определения (1.17) и соотношения (1.18) вытекает, что неравенство (3.6) достаточно доказать при $\tau = \pi$. Известно (см. [3, §\nobreakspace\{7.32.}], что при $\alpha > \beta > -1$, $\alpha > -1/2$ косинус-полиномы Якоби (1.1) $\phi_k = \phi_k^{\alpha, \beta}$ для произвольного фиксированного $\xi \in (0, \pi]$ равномерно стремятся к нулю на отрезке $[\xi, \pi]$, т.е.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\phi_k\|_{C[\xi, \pi]} = 0.$$

Отсюда, с учетом свойства (1.7), следует, что при каждом фиксированном $r > 0$ система функций

$$\psi_k(x) = \{1 - \phi_{n-1+k}(x)\}^r, \quad k \in \mathbf{N},$$

удовлетворяет условиям леммы 3.1 при $\tau = \pi$. И значит, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдется функция $F \in L_{\alpha, \beta}^2$, такая, что

$$\frac{E_n^2(F)}{\omega_r^2(F, \pi)} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} F_k^2}{\max_{0 \leq t \leq \pi} \sum_{k=n}^{\infty} F_k^2 \{1 - \phi_k(t)\}^r} \geq \frac{1}{1 + \varepsilon}, \quad F_k = \frac{(F, \phi_k)}{(\phi_k, \phi_k)}.$$

Это соотношение и определение (1.13) влекут (3.6). Следствие доказано.

4 Неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L_{\alpha, -1/2}^2$.

В этом пункте, с помощью предыдущего следствия, первого равенства в (1.2), соотношений (3.3) – (3.5) и утверждения (А) теоремы 1.1 будет получено

Следствие 4.1 Пусть $\alpha > -1/2$. Тогда имеют место следующие два утверждения

1) при любых $\tau > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbf{N}$ для константы (1.13) Джексона–Стечкина в пространстве $L_{\alpha, -1/2}^2$ выполняются оценки

$$1 \leq \mathcal{K}_n^{\alpha, -1/2}(\tau, r) \leq \mathcal{K}_{2n}^{\alpha, \alpha} \left(\frac{\tau}{2}, r \right) \leq \mathcal{K}_{2n-1}^{\alpha, \alpha} \left(\frac{\tau}{2}, r \right);$$

2) при $n \in \mathbf{N}$, $\tau \geq \min\{\pi, 2x_n^{\alpha, -1/2}\}$ справедливы неравенства

$$E_{n-1}(F) \leq \omega_r(F, \tau), \quad F \in L_{\alpha, -1/2}^2, \quad r \geq 1;$$

$$E_{n-1}(F) \leq 2^{(1-r)/2} \omega_r(F, \tau), \quad F \in L_{\alpha, -1/2}^2, \quad 0 < r < 1.$$

Доказательство. В силу первого равенства в (1.2) для величины (3.5) при $\alpha > \beta = -1/2$, $\tau > 0$, $r > 0$, $n \in \mathbf{N}$ имеем

$$\begin{aligned}
K_n^{\alpha, -1/2}(\tau, r) &= \sup \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k : \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k^{\alpha, -1/2}(t)\}^r \leq 1, t \in [0, \tau]; \rho_k \geq 0, k \geq n \right\} = \\
&= \sup \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k : \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \left\{1 - \phi_{2k}^{\alpha, \alpha} \left(\frac{t}{2}\right)\right\}^r \leq 1, t \in [0, \tau]; \rho_k \geq 0, k \geq n \right\} = \\
&= \sup \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k : \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_{2k}^{\alpha, \alpha}(t)\}^r \leq 1, t \in \left[0, \frac{\tau}{2}\right]; \rho_k \geq 0, k \geq n \right\} \leq \\
&\leq \sup \left\{ \sum_{k=2n}^{\infty} \rho_k : \sum_{k=2n}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k^{\alpha, \alpha}(t)\}^r \leq 1, t \in \left[0, \frac{\tau}{2}\right]; \rho_k \geq 0, k \geq 2n \right\} = \\
&= K_{2n}^{\alpha, \alpha} \left(\frac{\tau}{2}, r\right) \leq K_{2n-1}^{\alpha, \alpha} \left(\frac{\tau}{2}, r\right),
\end{aligned}$$

что вместе с равенством (3.4) и предыдущим следствием влечет первое утверждение данного следствия. Отсюда, принимая во внимание определение (1.13) и неравенство (1.21), получаем неравенства

$$1 \leq \mathcal{K}_n^{\alpha, -1/2}(\tau, r) \leq \mathcal{K}_{2n}^{\alpha, \alpha} \left(\frac{\tau}{2}, r\right) \leq 1 \quad \text{при} \quad r \geq 1, \quad \frac{\tau}{2} \geq 2x_{2n}^{\alpha, \alpha} = x_n^{\alpha, -1/2}, \quad n \in \mathbf{N},$$

которые вместе со вторым равенством в (1.18) и (1.9) завершают доказательство второго утверждения следствия.

5 Двойственная задача.

Большую роль при исследовании задачи (1.13) или эквивалентной ей задачи (3.3), (3.5) играет двойственная задача, которая для случая $\alpha = \beta = -1/2$, по существу, содержится и успешно применена в 1967 г. Н.И.Черных [14], [13]. Соотношение двойственности для более общей, чем (3.3), задачи было явно сформулировано и обосновано в совместной работе В.В.Арестова и В.Ю.Попова [24, леммы 1,2], которое мы приведем (для задачи (3.3)) в форме, близкой к той, которую использовал автор в [20, теорема 1] в случае $\alpha = \beta = -1/2$.

Именно, пусть $\tau > 0$, $V_0^+ = V_0^+[0, \tau]$ — множество ограниченных, неубывающих на отрезке $[0, \tau]$ функций $\mu \not\equiv \text{const}$, непрерывных в нуле ($\mu(0) = \mu(+0)$). Такие функции $\mu \in V_0^+$ будем называть весами.

Лемма 5.1 Пусть выполнены условия

$$\alpha \geq \beta > -1, \quad \alpha \geq -1/2, \quad \tau > 0, \quad r > 0, \quad n \in \mathbf{N}. \quad (5.1)$$

Тогда для величины (3.3) имеет место равенство

$$K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) = \min \left\{ \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{\inf_{k \geq n} \int_0^\tau \{1 - \phi_k(t)\}^r d\mu(t)} : \mu \in V_0^+ \right\}. \quad (5.2)$$

Из этой леммы следует, что каждый вес $\mu \in V_0^+$ дает для величины (3.3), а следовательно (см. (3.4)), и для искомой величины (1.13), оценки сверху

$$K_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) \leq \Phi(\mu), \quad \mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) \leq \sqrt{\Phi(\mu)}, \quad (5.3)$$

где функционал $\Phi(\mu) = \Phi_n^{\alpha,\beta}(\mu, \tau, r)$ задается формулой

$$\Phi(\mu) = \frac{\mu(\tau) - \mu(0)}{\inf_{k \geq n} \int_0^\tau \{1 - \phi_k(t)\}^r d\mu(t)}. \quad (5.4)$$

Ниже (в пункте 6) при

$$\alpha > \beta > -\frac{1}{2}, \quad n \geq \max \left\{ 2, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right\}, \quad \tau = 2x_n^{\alpha,\beta} \quad (5.5)$$

будет построен вес $\mu = \mu_\tau \in V_0^+[0, \tau]$, на котором значение функционала (5.4) равно единице $\Phi(\mu_\tau) = 1$. И, значит, (см. (5.3)) в этом случае мы получим оценку сверху для величины (1.13), совпадающую с оценкой снизу (3.6), т.е. найдем величину $\mathcal{K}_n^{\alpha,\beta}(\tau, r) = 1$ при выполнении условий (5.5). Для построения указанного веса нам понадобятся некоторые известные свойства обобщенного сдвига, вытекающие из его интегрального представления, которое, в свою очередь, следует из формулы умножения для полиномов Якоби $\phi_k^{\alpha,\beta}$ при $\alpha > \beta > -1/2$, установленной Дж. Гаспером [35], [36], а затем доказанной в другой эквивалентной форме Т. Курнвиндером [37], [38] (см. также [39, (4.2), (5.4), (5.5)]). При этом, как отмечается в [37], в случае $\alpha > \beta = 0$ формула сложения (и, как следствие, формула умножения) для полиномов Якоби получена ранее Р.Л.Шапиро [40].

6 Некоторые свойства обобщенного сдвига.

В данном пункте приводятся известные свойства обобщенного сдвига T_t (см. (1.5)), действующего в пространстве $L_{\alpha,\beta}^2$ при $\alpha > \beta > -1/2$. Отметим, что в ультрасферическом случае $\alpha = \beta > -1/2$ важные свойства этого сдвига были установлены в 1817 году А.М.Лежандром (случай $\alpha =$

$\beta = 0$) [41, с.262, формула (x)] и в 1874 году – Л.Гегенбауэром (случай $\alpha = \beta > -1/2$) (см. [42, с.402]). А именно, ими была доказана так называемая формула умножения для ультрасферических полиномов $\phi_k^{\alpha,\alpha}(x) = R_k^{\alpha,\alpha}(\cos x)$, $k \in \mathbf{Z}^+$,

$$\begin{aligned} T_t \phi_k^{\alpha,\alpha}(x) &= \phi_k^{\alpha,\alpha}(t) \phi_k^{\alpha,\alpha}(x) = \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi R_k^{\alpha,\alpha}(\cos x \cos t + \sin x \sin t \cos \xi) (\sin \xi)^{2\alpha} d\xi \end{aligned} \quad (6.1)$$

Почти сто лет спустя Дж.Гаспер получил аналог этого результата для косинус-полиномов Якоби $\phi_k^{\alpha,\beta}$, $\alpha > \beta > -1/2$, $k \in \mathbf{Z}^+$, в следующей истокообразной форме [35], [36] (см. также [38, пункт 5])

$$\begin{aligned} T_t \phi_k^{\alpha,\beta}(2x) &= \phi_k^{\alpha,\beta}(2t) \phi_k^{\alpha,\beta}(2x) = \\ &= \int_0^\pi \phi_k^{\alpha,\beta}(2\xi) \mathcal{F}^{\alpha,\beta}(\sin t \sin x, \cos t \cos x, \cos \xi) (\cos \xi)^{2\beta+1} \sin \xi d\xi \end{aligned} \quad (6.2)$$

здесь $0 < t, x < \pi/2$ и ядро $\mathcal{F}^{\alpha,\beta}$ задается формулой

$$\mathcal{F}^{\alpha,\beta}(a, b, c) = \frac{2\Gamma(\alpha + 1)a^{-2\alpha}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha - \beta)\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)} \int_0^\pi (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \cos v)_+^{\alpha-\beta-1} (\sin v)^{2\beta} dv, \quad (6.3)$$

$$(x)_+^\lambda = \begin{cases} x^\lambda, & \text{е } x > 0, \\ 0, & \text{е } x \leq 0. \end{cases}$$

Затем Т.Курнвиндер [37], [38] (см. также [39, пункты 4,5]) нашел эквивалентное выражение формулы умножения для косинус-полиномов Якоби $\phi_k^{\alpha,\beta}(x) = R_k^{\alpha,\beta}(\cos x)$, $k \in \mathbf{Z}^+$, по форме более близкой к формуле умножения Лежандра – Гегенбауэра (6.1)

$$\begin{aligned} T_t \phi_k^{\alpha,\beta}(x) &= \phi_k^{\alpha,\beta}(t) \phi_k^{\alpha,\beta}(x) = \\ &= \frac{2\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha - \beta)\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 \int_0^\pi R_k^{\alpha,\beta}(\cos \Psi) (1 - \rho^2)^{\alpha-\beta-1} \rho^{2\beta+1} (\sin \xi)^{2\beta} d\xi d\rho \end{aligned} \quad (6.4)$$

здесь

$$\cos \Psi = \cos t \cos x + \rho \sin t \sin x \cos \xi + \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)(1 - \cos t)(1 - \cos x), \quad (6.5)$$

$t, x \in \mathbf{R}$, $k \in \mathbf{Z}^+$, $\alpha > \beta > -1/2$. Следовательно, в этом случае действие сдвига (1.5) на произвольную функцию $F(x) = f(\cos x) \in L_{\alpha,\beta}^2$ при $\alpha > \beta > -1/2$ выражается в следующей интегральной форме

$$T_t F(x) = \frac{2\Gamma(\alpha + 1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\alpha - \beta)\Gamma\left(\beta + \frac{1}{2}\right)} \int_0^1 \int_0^\pi f(\cos \Psi) (1 - \rho^2)^{\alpha-\beta-1} \rho^{2\beta+1} (\sin \xi)^{2\beta} d\xi d\rho, \quad (6.6)$$

где $t, x \in \mathbf{R}$ и $\cos \Psi$ вычисляется по формуле (6.5). Другое эквивалентное истокообразное представление этого сдвига получается с помощью ядра (6.3) в формуле умножения (6.2) [38, пункт 5], [39, пункт 4].

Необходимо сказать, что указанным выше результатам Дж.Гаспера и Т.Курнвиндера, как отмечается в работе [37], предшествовал результат Р.Л.Шапиро [40] (1968 г.) о формуле сложения для полиномов Якоби, из которого следует (6.6) при $\alpha > \beta = 0$.

Приведем несколько свойств сдвига, вытекающих из его интегрального представления. Эти свойства нам потребуются в следующем пункте.

Лемма 6.1 Пусть $\alpha > \beta > -1/2$, $0 \leq \tau \leq \pi/2$, функция $F(x) = f(\cos x)$ непрерывна при всех $x \in \mathbf{R}$ и

$$F(x) = 0, \quad x \in [\tau, \pi].$$

Тогда функция $G(x) = T_\tau F(x)$ является непрерывной при всех $x \in \mathbf{R}$ и

$$G(x) = 0, \quad x \in [2\tau, \pi].$$

Доказательство. Непрерывность функции G легко следует из интегрального представления (6.6), (6.5) оператора сдвига. По условию леммы имеем

$$f(u) = 0, \quad u \in [-1, \cos \tau].$$

В силу интегрального представления (6.6), (6.5) сдвига для доказательства леммы достаточно показать, что функция

$$A(x, \tau, \rho, \xi) = \cos \Psi = \cos \tau \cos x + \rho \sin \tau \sin x \cos \xi + \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)(1 - \cos \tau)(1 - \cos x)$$

удовлетворяет неравенствам

$$-1 \leq A(x, \tau, \rho, \xi) \leq \cos \tau, \quad (6.7)$$

если выполнены условия

$$0 < \tau \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \xi \leq \pi, \quad 2\tau \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (6.8)$$

Вначале докажем первое неравенство в (6.7). Ясно, что из (6.8) следует, что $\sin \tau \sin x \geq 0$. Поэтому имеем

$$A(x, \tau, \rho, \xi) \geq A(x, \tau, \rho, \pi) = A_1(x, \tau, \rho) = \cos \tau \cos x - \rho \sin \tau \sin x + \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)(1 - \cos \tau)(1 - \cos x).$$

Заметим, что функция $A_1(x, \tau, \rho)$ по третьей переменной ρ является параболой, причем ее глобальный минимум по этому аргументу достигается в точке

$$\rho^* = \frac{\sin \tau \sin x}{(1 - \cos \tau)(1 - \cos x)}.$$

То есть

$$A_1(x, \tau, \rho) \geq A_1(x, \tau, \rho^*) = -1,$$

и, значит, первое неравенство в (6.7) доказано.

Перейдем к доказательству второго неравенства в (6.7). Условия (6.8) влекут неравенство

$$A(x, \tau, \rho, \xi) \leq A(x, \tau, \rho, 0) = A_2(x, \tau, \rho) = \cos \tau \cos x + \rho \sin \tau \sin x + \frac{1}{2}(\rho^2 - 1)(1 - \cos \tau)(1 - \cos x),$$

а также

$$A_2(x, \tau, \rho) \leq \max\{A_2(x, \tau, 0), A_2(x, \tau, 1)\}.$$

Имеем

$$A_2(x, \tau, 0) = \cos \tau \cos x - \frac{1}{2}(1 - \cos \tau)(1 - \cos x) = \frac{1}{2}\{(1 + \cos \tau) \cos x - 1 + \cos \tau\} \leq \cos \tau;$$

$$A_2(x, \tau, 1) = \cos \tau \cos x + \sin \tau \sin x = \cos(x - \tau) \leq \cos \tau.$$

Лемма доказана.

В работе Дж.Гаспера [35] содержится следующее определение свертки двух функций F, G из $L_{\alpha, \beta}^2$ (а на самом деле — и для функций из $L_{\alpha, \beta}^1$), которое можно записать в виде

$$(F * G)(t) = \int_0^\pi \{T_x F(t)\} G(x) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{2\beta+1} dx. \quad (6.9)$$

Кроме того, в указанной работе приведено свойство коммутативности этой операции

$$(F * G)(t) = (G * F)(t), \quad t \in \mathbf{R}. \quad (6.10)$$

Поскольку $T_x F(t) = T_t F(x)$ для любых $x, t \in \mathbf{R}$, то равенство (6.10) означает самосопряженность оператора сдвига. То есть справедлива лемма.

Лемма 6.2 Пусть $\alpha > \beta > -1/2$, $t \in \mathbf{R}$. Тогда для любых двух функций $F, G \in L_{\alpha, \beta}^2$ выполняется равенство

$$(T_t F, G) = (F, T_t G). \quad (6.11)$$

7 Оценка сверху.

В данном пункте будет построен вес $\mu \in V_0^+[0, \tau]$, на котором, при выполнении условий (5.5), достигается минимум в двойственной задаче (5.2).

Рассмотрим следующее множество функций

$$\mathcal{C}_n^{\alpha, \beta} = \left\{ F(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \phi_k^{\alpha, \beta}(x) : F(0) = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k = 1, \rho_k \geq 0, k \geq n \right\}, \quad (7.1)$$

где $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $n \in \mathbf{N}$, $\phi_k^{\alpha, \beta}$ – косинус-полином Якоби (1.1). Это множество является выпуклым подмножеством пространства $C[0, \pi]$ непрерывных на $[0, \pi]$ функций. Так же, как и в ультрасферическом случае [1, пункт 4], введем следующее

Определение 7.1 Положительное число $\sigma = \sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha, \beta})$ назовем точкой Черныха для множества $\mathcal{C}_n^{\alpha, \beta}$, если одновременно выполняются следующие два условия

- (а) для любой функции $F \in \mathcal{C}_n^{\alpha, \beta}$ найдется точка $x^* \in (0, \sigma)$, в которой $F(x^*) < 0$;
- (б) для любого $\delta \in (0, \sigma)$ найдутся функция $F_\delta \in \mathcal{C}_n^{\alpha, \beta}$ и число $\varepsilon > 0$, такие, что $F_\delta(x) \geq \varepsilon$ при всех $x \in [0, \delta]$.

Результаты Н.И.Черных [14], [15] (см. (1.15), (1.16)) эквивалентны равенству

$$\sigma(\mathcal{C}_n^{-1/2, -1/2}) = \frac{\pi}{n}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

В.Ю.Попов [17, теорема 3] получил результат, из которого вытекает неравенство

$$\sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha, \alpha}) \leq \frac{2\pi}{n+1}, \quad \alpha = 0, \frac{1}{2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

В работе автора [1, лемма 4.1] получены оценки

$$\tau_n^{\alpha, \alpha} \leq \sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha, \alpha}) \leq 2\tau_n^{\alpha, \alpha}, \quad \alpha \geq -\frac{1}{2}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

С помощью функции $\phi_n^{\alpha, \beta}$ легко доказать следующее утверждение.

Предложение 7.1 При $\alpha \geq \beta > -1$, $\alpha \geq -1/2$, $n \in \mathbf{N}$ имеет место оценка снизу

$$x_n^{\alpha, \beta} \leq \sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha, \beta}), \quad (7.2)$$

где $x_n^{\alpha, \beta}$ есть первый положительный нуль косинус-полинома Якоби $\phi_n^{\alpha, \beta}$ (см. (1.20)).

В дальнейшем нам потребуются известные оценки для $x_n^{\alpha,\beta}$ (см. [3, §\nobreakspace\{6.2\}]).

Предложение 7.2 При $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $n \geq \max \left\{ 2, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right\}$ выполняются неравенства

$$0 < x_n^{\alpha,\beta} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Основным результатом данного пункта является

Лемма 7.1 Пусть $\alpha > \beta > -1/2$, $n \geq \max \left\{ 2, 1 + \frac{\alpha - \beta}{2} \right\}$. Тогда справедлива оценка сверху

$$\sigma(\mathcal{C}_n^{\alpha,\beta}) \leq 2x_n^{\alpha,\beta}. \quad (7.3)$$

Доказательство. Доказательство будем проводить так же, как это сделано в ультрасферическом случае [1, лемма\nobreakspace\{4.1\}], внося естественные изменения. Для краткости положим $x_n = x_n^{\alpha,\beta}$, $\phi_k = \phi_k^{\alpha,\beta}$, $k \in \mathbf{Z}^+$. Пусть $\mathcal{V} = \mathcal{V}_n^{\alpha,\beta}$ есть четная 2π -периодическая функция, непрерывная на всей действительной оси \mathbf{R} , которую достаточно задать на отрезке $[0, \pi]$:

$$\mathcal{V}(x) = \begin{cases} \phi_n(x), & 0 \leq x \leq x_n, \\ 0, & x_n < x \leq \pi. \end{cases} \quad (7.4)$$

Определим четную 2π -периодическую функцию v , задав ее на отрезке $[0, \pi]$ формулой

$$v(x) = \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{2\beta+1} T_{x_n} \mathcal{V}(x), \quad x \in [0, \pi], \quad (7.5)$$

где T_t есть оператор (обобщенного) сдвига с шагом t (см. (1.5), (6.6)). Из определения (7.4), предложения 7.2, леммы 6.1 и формулы (6.6) следует, что

$$v(x) \geq 0, \quad x \in \mathbf{R}; \quad v(x) \neq 0; \quad v(x) = 0, \quad x \in [2x_n^{\alpha,\beta}, \pi]. \quad (7.6)$$

Используя самосопряженность оператора сдвига (см. лемму 6.2) найдем следующие коэффициенты

$$\begin{aligned} a_k &= \int_0^{2x_n} v(x) \phi_k(x) dx = \int_0^\pi v(x) \phi_k(x) dx = (T_{x_n} \mathcal{V}, \phi_k) = (\mathcal{V}, T_{x_n} \phi_k) = \\ &= \phi_k(x_n) (\mathcal{V}, \phi_k) = \phi_k(x_n) \int_0^{x_n} \phi_n(x) \phi_k(x) \left(\sin \frac{x}{2} \right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x}{2} \right)^{2\beta+1} dx = \\ &= \phi_k(x_n) \int_0^{x_n} \varphi_n(x) \varphi_k(x) dx, \end{aligned} \quad (7.7)$$

где

$$\varphi_k(x) = \phi_k(x) \left(\sin \frac{x}{2}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{x}{2}\right)^{\beta+\frac{1}{2}}, \quad k \in \mathbf{Z}^+. \quad (7.8)$$

Функции φ_k удовлетворяют дифференциальному уравнению (см. [3, с.79, §4.24])

$$\varphi_k''(x) - q(x)\varphi_k(x) = -\left(k + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}\right)^2 \varphi_k(x), \quad k \in \mathbf{Z}^+, \quad (7.9)$$

где

$$q(x) = \frac{\alpha^2 - \frac{1}{4}}{4 \left(\sin \frac{x}{2}\right)^2} + \frac{\beta^2 - \frac{1}{4}}{4 \left(\cos \frac{x}{2}\right)^2}.$$

Рассмотрим выражение

$$c_k = \left\{ \left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}\right)^2 - \left(k + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}\right)^2 \right\} \int_0^{x_n} \varphi_n(x)\varphi_k(x)dx. \quad (7.10)$$

С помощью уравнения (7.9) получаем

$$\begin{aligned} c_k &= \int_0^{x_n} \{\varphi_k''(x)\varphi_n(x) - \varphi_k(x)\varphi_n''(x)\}dx = \\ &= \{\varphi_k'(x)\varphi_n(x) - \varphi_k(x)\varphi_n'(x)\} \Big|_0^{x_n} = -\varphi_k(x_n)\varphi_n'(x_n) = \\ &= -\phi_k(x_n)\phi_n'(x_n) \left(\sin \frac{x_n}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x_n}{2}\right)^{2\beta+1}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Из (7.7) – (7.11) видно, что

$$a_n = 0, \quad a_k \leq 0 \quad \text{п} \quad k > n, \quad a_k \geq 0 \quad \text{п} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1, \quad (7.12)$$

так как $\phi_n'(x_n) < 0$, и при $k \neq n$ имеем

$$a_k = \frac{c_k}{\left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}\right)^2 - \left(k + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}\right)^2} = \frac{\phi_k^2(x_n)\phi_n'(x_n) \left(\sin \frac{x_n}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{x_n}{2}\right)^{2\beta+1}}{\left(k + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}\right)^2 - \left(n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}\right)^2},$$

Учитывая свойства (7.6) и (7.12), получаем, что для каждой функции $F(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \phi_k(x)$ из множества $\mathcal{C}_n^{\alpha, \beta}$ (см. (7.1)) выполняется соотношение

$$\int_0^{2x_n} F(x)v(x)dx = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \int_0^{2x_n} \phi_k(x)v(x)dx = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k a_k \leq 0,$$

и, значит, найдется точка $x^* \in (0, 2x_n)$, в которой $F(x^*) < 0$. Отсюда следует (7.3). Лемма доказана.

8 Доказательство теоремы 2.1.

Следствие 4.1 влечет утверждения теоремы 2.1 при $\alpha > \beta = -1/2$. Пусть теперь $\alpha > \beta > -1/2$. В этом случае пункт (В) теоремы 2.1 содержится в следствии 3.1. В силу неравенства $1 - ru \leq (1 - u)^r$ при $|u| \leq 1$, $r \geq 1$, и соотношений (3.3) – (3.5) для доказательства неравенства (2.1) достаточно доказать неравенство

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k < \max_{0 \leq t \leq 2x_n^{\alpha, \beta}} \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - r\phi_k(t)\}, \quad \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k = 1, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \in \mathbf{N}. \quad (8.1)$$

Ряд в правой части (8.1) можно представить в виде

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \{1 - r\phi_k(t)\} = \sum_{k=n}^{\infty} \rho_k - rF(t),$$

где $F \in \mathcal{C}_n^{\alpha, \beta}$ (см. (7.1)). В силу (7.3) и определения 7.1 найдется точка $x^* \in (0, 2x_n^{\alpha, \beta})$, в которой $F(x^*) < 0$, что эквивалентно (8.1).

Утверждение (2.2) доказывается аналогично с помощью неравенства $2^{r-1}(1-u) \leq (1-u)^r$ при $0 < r < 1$, $|u| \leq 1$. Теорема 2.1 доказана.

Как уже отмечалось выше, неравенство Джексона–Стечкина в пространстве $L_{\alpha, \beta}^2$ при $\alpha = \beta = (m-3)/2$, $m = 2, 3, \dots$, тесно связано с аналогичным неравенством в пространстве $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ комплексных функций, заданных на единичной сфере \mathbf{S}^{m-1} вещественного евклидова пространства \mathbf{R}^m . В случае, когда α, β различные, указанное неравенство связано с аналогичным неравенством в пространстве L^2 комплексных функций, заданных на проективных пространствах $\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{R})$ (при $\alpha = (m-3)/2, \beta = -1/2, m \geq 3$) и $\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})$ (при $\alpha = m-2, \beta = 0, m \geq 3$) над полями \mathbf{R} и вещественных и комплексных чисел, соответственно.

9 Неравенство Джексона–Стечкина в L^2 на сфере и проективных пространствах.

Прямые теоремы теории приближения функций многих переменных, в том числе – заданных на таких классических многообразиях как сфера, тор, евклидово и проективное пространство, изучались с начала этого века и до сих пор являются объектом интенсивных исследований. Некоторые исторические сведения по неравенствам Джексона–Стечкина на сфере и проективных пространствах содержатся в работах [43], [44], [45], [9], [1], [46].

Начнем со сферы. Здесь будет дополнен результат В.В.Арестова [1, утверждение (В) теоремы \повгеакспрасе {2.2}] об оценке снизу константы Джексона–Стечкина на сфере \mathbf{S}^{m-1} , $m \geq 3$. При этом мы будем использовать, в основном, обозначения и известные факты из гармонического анализа, применявшиеся в [1].

Итак, пусть $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$, $m \geq 2$, есть пространство комплексных функций, заданных на единичной сфере \mathbf{S}^{m-1} пространства \mathbf{R}^m , со скалярным произведением

$$(f, g) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{m-1}|} \int_{\mathbf{S}^{m-1}} f(\xi) \bar{g}(\xi) d\xi \quad (9.1)$$

и нормой $\|f\| = (f, f)^{1/2}$. Здесь $|\mathbf{S}^{m-1}| = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$ – площадь сферы \mathbf{S}^{m-1} .

Многочленом степени не выше n называется функция

$$p(x) = \sum c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m}, \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_m \leq n, \quad \alpha_k \in \mathbf{Z}^+,$$

с комплексными коэффициентами $c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}$. Множество сужений таких многочленов на \mathbf{S}^{m-1} обозначим через $P_n = P_{n,m}$. Наилучшим приближением функции $f \in L^2$ пространством P_n называется величина

$$E_n(f) = \min\{\|f - p\| : p \in P_n\}.$$

Сдвигом с шагом $t \in \mathbf{R}$ называется (см., например, [44, формулы (1.1), (1.19)]) оператор M_t , действующий из $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ в $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ по правилу

$$M_t f(x) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{m-2}|} \int_{\mathbf{S}_{\pi/2}^{m-2}(x)} f(x \cos t + \xi \sin t) d\xi, \quad (9.2)$$

здесь $x \in \mathbf{S}^{m-1}$, и интеграл берется по сфере $\mathbf{S}_{\pi/2}^{m-2}(x) = \{\xi \in \mathbf{S}^{m-1} : x \cdot \xi = \cos \frac{\pi}{2} = 0\}$, где $x \cdot \xi = x_1 \xi_1 + \dots + x_m \xi_m$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_m)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ из \mathbf{R}^m . При $t \in (0, \pi)$ этот оператор можно представить в виде

$$M_t f(x) = \frac{1}{|\mathbf{S}^{m-2}| (\sin t)^{m-2}} \int_{\mathbf{S}_t^{m-2}(x)} f(\xi) d\xi, \quad (9.3)$$

где $\mathbf{S}_t^{m-2}(x) = \{\xi \in \mathbf{S}^{m-1} : x \cdot \xi = \cos t\}$. Разностным оператором порядка $r > 0$ с шагом $t \in \mathbf{R}$ называется оператор [9]

$$\Delta_t^r = (I - M_t)^{r/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r/2}{k} M_t^k,$$

где I – тождественный оператор. Соответствующим модулем непрерывности порядка $r > 0$ функции $f \in L_2(\mathbf{S}^{m-1})$ является следующая функция переменного $\tau > 0$

$$\omega_r(f, \tau) = \sup\{\|\Delta_t^r f\| : 0 \leq t \leq \tau\}.$$

Обозначим через $\mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2(\mathbf{S}^{m-1})}$, $\tau > 0, r > 0, m = 2, 3, \dots$, точную константу \mathcal{K} в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$

$$E_{n-1}(f) \leq \mathcal{K}\omega_r(f, \tau), \quad f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1}).$$

То есть положим

$$\mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2(\mathbf{S}^{m-1})} = \sup\left\{\frac{E_{n-1}(f)}{\omega_r(f, \tau)} : f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1}), f \not\equiv \text{const}\right\}, \quad (9.4)$$

$n, m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2, \tau > 0, r > 0$. Хорошо известно, что пространство $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ разлагается в ортогональную прямую сумму

$$L^2(\mathbf{S}^{m-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus H_k$$

конечномерных подпространств $H_k = H_{k,m}$, $\dim H_k = \frac{2k+m-2}{m-2} \binom{k+m-3}{k}$ сферических гармоник степени k (см., например, [4]). Напомним, что сферической гармоникой степени k называют сужение на сферу \mathbf{S}^{m-1} однородного гармонического многочлена степени k

$$q(x) = \sum c_{\alpha_1, \dots, \alpha_m} x_1^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot x_m^{\alpha_m}, \quad \sum_{l=1}^m \alpha_l = k, \quad \alpha_l \in \mathbf{Z}^+, \quad \Delta q = 0,$$

где $\Delta = \sum_{l=1}^m \frac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ есть оператор Лапласа. Оператор ортогонального проектирования $Y_k : L^2(\mathbf{S}^{m-1}) \rightarrow H_k$ имеет вид

$$Y_k f(x) = \frac{\dim H_k}{|\mathbf{S}^{m-1}|} \int_{\mathbf{S}^{m-1}} R_k^{\alpha, \alpha}(x \cdot \xi) f(\xi) d\xi, \quad \alpha = \frac{m-3}{2}, \quad k \in \mathbf{Z}^+.$$

Иными словами, каждая функция $f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ единственным образом разлагается в ряд Фурье по сферическим гармоникам, сходящийся к ней в $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k f(x). \quad (9.5)$$

Действие оператора сдвига M_t с шагом $t \in \mathbf{R}$ на функцию $f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ выражается формулой

$$M_t f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{\alpha, \alpha}(\cos t) Y_k f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k^{\alpha, \alpha}(t) Y_k f(x), \quad \alpha = \frac{m-3}{2}.$$

Отсюда с помощью равенства Парсеваля получаются следующие известные соотношения

$$E_{n-1}^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \|Y_k f\|^2,$$

$$\|\Delta_t^r f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \{1 - \phi_k^{\alpha, \alpha}(t)\}^r \|Y_k f\|^2, \quad \alpha = \frac{m-3}{2}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Поэтому задача (9.4) сводится к задаче (3.3) при $\alpha = \beta = \frac{m-3}{2}$, то есть, с учетом равенства (3.4), имеем

$$\mathcal{K}_n^2(\tau, r)_{L^2(\mathbf{S}^{m-1})} = K_n^{\alpha, \alpha}(\tau, r) = \{\mathcal{K}_n^{\alpha, \alpha}(\tau, r)\}^2, \quad \alpha = \frac{m-3}{2}, \quad (9.6)$$

для $n, m \in \mathbf{N}$, $m \geq 2$, $\tau > 0$, $r > 0$.

Теперь с помощью первого утверждения следствия 4.1 мы можем сформулировать отмеченное выше дополнение к результату В.В. Арестова об оценке снизу константы Джексона–Стечкина на сфере. А именно, в пункте (В) теоремы 2.2 из работы [1] условие $\tau \in (0, \pi)$ можно ослабить, заменив его на условие $\tau > 0$. Тем самым упрощается формулировка упомянутой теоремы.

Теорема 9.1 Для каждого $n \in \mathbf{N}$ выполняются утверждения

(А) при $m = 2, 3, \dots$, $\alpha = \frac{m-3}{2}$ для каждой функции $f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1})$, $f \neq \text{const}$, выполняется неравенство

$$E_{n-1}(f) < \max\{1, 2^{(1-r)/2}\} \omega_r(f, 2x_n^{\alpha, \alpha}), \quad r > 0;$$

(В) при $m = 3, 4, \dots$, $\tau > 0$ существует последовательность функций g_k , $k \in \mathbf{N}$, из $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$, такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E_{n-1}(g_k)}{\omega_r(g_k, \tau)} \geq 1, \quad r > 0.$$

Замечание 9.1. В силу равенств (9.6) и определения (1.13) все пункты замечания 1.1 естественным образом переносятся и на теорему 9.1.

Перейдем к задаче о точном неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbf{P}^{m-1})$ комплексных функций, заданных на вещественном проективном пространстве $\mathbf{P}^{m-1} = \mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{R})$, $m = 3, 4, \dots$. Как хорошо известно (см. [29], [4]), пространство $L^2(\mathbf{P}^{m-1})$ можно отождествить с подпространством всех четных функций f из пространства $L^2(\mathbf{S}^{m-1})$. То есть можно считать, что

$$L^2(\mathbf{P}^{m-1}) = \{f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1}) : f(x) = f(-x), x \in \mathbf{S}^{m-1}\}.$$

Поскольку для четной функции $f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1})$ разложение (9.4) в ряд Фурье содержит сферические гармоники лишь четной степени

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_{2k} f(x),$$

то для функции $f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1})$ величиной ее наилучшего приближения порядка $n - 1$ естественно назвать следующее число

$$E_{n-1}(f) = \min \left\{ \|f - g\| : g \in \sum_{k=0}^{n-1} H_{2k} \right\}.$$

В качестве оператора сдвига с шагом $t \in \mathbf{R}$ возьмем сужение оператора M_t , определенного формулой (9.2), на $L^2(\mathbf{P}^{m-1})$. Поэтому понятие модуля непрерывности порядка $r > 0$ функции f из $L^2(\mathbf{P}^{m-1})$ остается прежним. Задача о точной константе $\mathcal{K} = \mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2(\mathbf{P}^{m-1})}$ в неравенстве Джексона–Стечкина в пространстве $L^2(\mathbf{P}^{m-1})$

$$E_{n-1}(f) \leq \mathcal{K} \omega_r(f, \tau), \quad f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1}), \quad (9.7)$$

совпадает с задачей

$$\mathcal{K}_n(\tau, r)_{L^2(\mathbf{P}^{m-1})} = \sup \left\{ \frac{E_{n-1}(f)}{\omega_r(f, \tau)} : f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1}), f \not\equiv \text{const} \right\}. \quad (9.8)$$

Эта задача по указанной выше схеме сводится к задаче о точной константе $K = \widetilde{K}_n^{\alpha, \alpha}(\tau, r)$, $\alpha = \frac{m-3}{2}$ в неравенстве

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \leq K \max_{0 \leq t \leq \tau} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_{2k}^{\alpha, \alpha}(t)\}^r, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \geq 1,$$

или, то же самое, (см. первое равенство в (1.2)) в неравенстве

$$\sum_{k=n}^{\infty} \rho_k \leq K \max_{0 \leq t \leq 2\tau} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \{1 - \phi_k^{\alpha, -1/2}(t)\}^r, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k < \infty, \quad \rho_k \geq 0, \quad k \geq 1.$$

Отсюда и (3.2) следует соотношение

$$\mathcal{K}_n^2(\tau, r)_{L^2(\mathbf{P}^{m-1})} = K_n^{\alpha, -1/2}(2\tau), \quad \alpha = \frac{m-3}{2},$$

при $n, m \in \mathbf{N}$, $m \geq 3$, $\tau > 0$, $r > 0$, которое в силу (3.4), (1.13) и следствия 2.2 влечет утверждение

Следствие 9.1 Пусть $n, m \in \mathbf{N}$, $m \geq 3$, $r > 0$, $\tau \geq \min\{\pi/2, x_n^{(m-3)/2, -1/2}\}$. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1})$ справедливо неравенство Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \max\{1, 2^{(1-r)/2}\} \omega_r(f, \tau),$$

причем оно является точным для произвольных фиксированных $n \in \mathbf{N}$ и $r \geq 1$.

Рассмотрим случай проективного пространства $\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})$, $m \geq 3$ над полем \mathbf{C} комплексных чисел. Пусть $\mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{C}) = \{x \in \mathbf{C}^m : |x| = 1\}$ есть единичная сфера пространства \mathbf{C}^m , здесь $|x| = \sqrt{x \cdot x}$, $x \cdot y = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_m \bar{y}_m$ — скалярное произведение векторов $x = (x_1, \dots, x_m)$, $y = (y_1, \dots, y_m)$ из \mathbf{C}^m . Так же, как и выше, используя известную (см. [43], [29], [4]) интерпретацию $\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})$, в терминах классов эквивалентностей на единичной сфере $\mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{C})$, пространство $L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$ можно отождествить с подпространством функций $f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{C}))$, которые являются "четными" в следующем смысле $f(x) = f(cx)$ при $x \in \mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{C})$ и $c \in \mathbf{S}^0(\mathbf{C})$. То есть можно считать, что

$$L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})) = \{f \in L^2(\mathbf{S}^{m-1}(\mathbf{C})) : f(x) = f(cx), c \in \mathbf{C}, |c| = 1\}.$$

Пространство $L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$ разлагается в ортогональную прямую сумму (см. [4])

$$L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus V_k$$

конечномерных подпространств $V_k = V_{k,m}$, $\dim V_k = \binom{m+k-1}{k}^2 - \binom{m+k-2}{k-1}^2$ многочленов $q(x) = q(x_1, x_2, \dots, x_m, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m)$ однородных степени k как относительно переменных x_1, x_2, \dots, x_m , так и относительно сопряженных переменных $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$, и гармонических в том смысле, что

$$\sum_{l=1}^m \frac{\partial^2 q}{\partial x_l \partial \bar{x}_l} = 0.$$

Таким образом, каждая функция $f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$ единственным образом разлагается в следующий ряд Фурье, сходящийся к ней в $L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k f(x), \quad P_k f \in V_k.$$

Поэтому величина ее наилучшего приближения

$$E_{n-1}(f) = \inf \left\{ \|f - g\| : g \in \sum_{k=0}^{n-1} V_k \right\}$$

порядка $n - 1$, $n \in \mathbf{N}$, удовлетворяет равенству

$$E_{n-1}^2(f) = \sum_{k=n}^{\infty} \|P_k f\|^2.$$

В работе В.И.Иванова и О.И.Смирнова [47, с.101] (см. также [48, с.100]) доказано, что оператор среднего значения (см. [49, гл.1, §\nobreakspace\{4\}]) (аналог оператора M_t , см. (9.3)) для функций, заданных на компактных сильно однородных (или, что тоже самое, духточечно-однородных или дважды однородных) метрических пространствах, выражается через зональные сферические функции. В частности, учитывая явное выражение зональных сферических функций на $\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C})$ (см. [37], [29], [4]) через многочлены Якоби $R_k^{m-2,0}$, получаем, что указанный оператор среднего значения в пространстве $L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$ эквивалентен следующему оператору обобщенного сдвига

$$\mathcal{U}_t f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} R_k^{m-2,0}(\cos 2t) P_k f(x), \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Далее, по аналогии с тем, как это уже делалось раньше, на основе обобщенного сдвига определяются разностный оператор порядка $r > 0$ с шагом $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ и соответствующий модуль непрерывности функции $f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$, который мы будем обозначать также через $\omega_r(f, t)$. Затем, с помощью теоремы 2.1, получаем

Следствие 9.2 Пусть $m = 3, 4, \dots$, $n \geq \max \left\{ 2, \frac{m-2}{2} \right\}$, $r \geq 0$. Тогда для любой функции $f \in L^2(\mathbf{P}^{m-1}(\mathbf{C}))$ справедливо неравенство Джексона–Стечкина

$$E_{n-1}(f) \leq \max\{1, 2^{(1-r)/2}\} \omega_r(f, x_n^{m-2,0}),$$

причем оно является точным для любых фиксированных $n \geq \max \left\{ 2, \frac{m-2}{2} \right\}$ и $r \geq 1$.

Из утверждений, содержащихся в работах [47], [48], [37] следует, что наряду с указанными выше тремя важными приложениями частных случаев теоремы 2.1, относящихся к неравенствам Джексона–Стечкина в пространствах $L^2_{(m-3)/2, (m-3)/2}$, $L^2_{(m-3)/2, -1/2}$, $L^2_{m-2, 0}$, $m = 2, 3, \dots$ имеются, по крайней мере, еще два. А именно, к задачам о константах Джексона–Стечкина в пространствах $L^2_{2m-1, 1}$, $m = 2, 3, \dots$ и $L^2_{7, 3}$ сводятся соответственно аналогичные задачи в пространствах $L^2(\mathbf{P}^{4m}(\mathbf{H}))$, $m = 2, 3, \dots$ и $L^2(\mathbf{P}^{16}(\mathbf{Ca}y))$. Здесь $\mathbf{P}^{4m}(\mathbf{H})$ есть проективное пространство над телом кватернионов $\mathbf{H} = \{x_0 + x_1i + x_2j + x_3k : x_\nu \in \mathbf{R}\}$, $\mathbf{P}^{16}(\mathbf{Ca}y)$ – проективная плоскость Кэли. Верхние индексы $4m$ и 16 обозначают вещественную размерность соответствующих многообразий.

Список литературы

- [1] **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Матем. заметки, 1996. Т.60, в.3. С.333–355.
- [2] **Бабенко А.Г.** Точное неравенство Джексона в пространстве L_2 с весом Якоби // Материалы международной конференции и Чебышевских чтений, посвященных 175-летию со дня рождения П.Л.Чебышева. Т.1. М.: изд-во МГУ, 1996. С.40–43.
- [3] **Сеге Г.** Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз. 1962, 500 с.
- [4] **Левенштейн В.И.** Границы для упаковок метрических пространств и некоторые их приложения // Проблемы кибернетики. 1983. Т.40. С.44–110.
- [5] **Lofstrom J., Peetre J.** Approximation Theorems Connected with Generalized Translations // Math. Ann. 1969. V.181. PP. 255–268.
- [6] **Grunwald A.K.** Uber «begrenzte» Derivationen und deren Anwendung // Z. angew. Math. und Phys. 1867, bd.12. S. 441-480.
- [7] **Летников А.В.** Теория дифференцирования с произвольным указателем // Матем. сб. 1868. Т.3. С.1-68.
- [8] **Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.** Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.

- [9] **Рустамов Х.П.** О приближении функций на сфере // Известия Академии наук, серия матем. 1993. Т.57, N 5. С.127–148.
- [10] **Рустамов Х.П.** Модули гладкости высших порядков, связанные с разложением Фурье – Якоби, и приближение функций алгебраическими многочленами // ДАН. 1995. Т.344, N 5. С.593–596.
- [11] **Стечкин С.Б.** О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР, серия матем. 1951. Т.15. С.219–242.
- [12] **Потапов М.К.** О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1. Матем., механ., 1983, N 4. С.43–52.
- [13] **Черных Н.И.** О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Матем. заметки. 1967. Т.2, в.5. С.513–522.
- [14] **Черных Н.И.** О неравенстве Джексона в L_2 // Труды МИ АН СССР. 1967. Т.88. С.71–74.
- [15] **Arestov V.V., Chernykh N.I.** On the L_2 -approximation of periodic functions by trigonometric polynomials // In: Approximation and functions spaces.— Proc. Conf. Gdan'sk, 1979.— Amsterdam: North-Holland, 1981. PP.25–43.
- [16] **Юдин В.А.** Многомерная теорема Джексона в L_2 // Матем. заметки. 1981. Т.29, в.2. С.309–315.
- [17] **Попов В.Ю.** О точных константах в неравенствах Джексона для наилучших сферических среднеквадратичных приближений // Изв. вузов. Математика. 1981. N 12. С.67–78.
- [18] **Попов В.Ю.** Многомерные приближения в $L_2(T_m)$ // Теория функций и приближений. — Труды 3-й Саратовской зимней Школы (27 января – 7 февраля 1986 г.) Межвузовский научный сборник. Ч.3.— Саратов: Саратовский университет, 1988. С.22–25.
- [19] **Попов В.Ю.** Приближение на сфере в L_2 // ДАН СССР. 1988. Т.301, N 4. С.793–797.
- [20] **Бабенко А.Г.** О точной константе в неравенстве Джексона в L^2 // Матем. заметки. 1986. Т.39, в.5. С.651–664.

- [21] **Бабенко А.Г.** О неравенстве Джексона в пространстве L^2 // Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. Свердловск: УНЦ АН СССР, 1987. С.4–14.
- [22] **Шалаев В.В.** О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Украинский матем. журн. 1991. Т.43, N 1. С.125–129.
- [23] **Шакенова М.Ж.** О точном неравенстве между наилучшими приближениями и модулем гладкости положительного порядка в $L_p[0, 2\pi]^2$ // Применение методов теории функций и функционального анализа к задачам математической физики. Тез. докл.— Алматы, 1993. С.178–179.
- [24] **Арестов В.В., Попов В.Ю.** Неравенство Джексона на сфере L_2 // Известия вузов. Математика. 1995. N 8 (399). С.13–20.
- [25] **Иванов В.И., Смирнов О.И.** О теореме Джексона в пространстве $l_2(\mathbf{Z}_2^n)$ // Матем. заметки. 1996. Т.60, N 3. С.390–405.
- [26] **Горбачев Д.В.** Точные константы Джексона на группе $SU(2)$ // Алгебра и анализ. Тезисы докладов школы-конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М.Гагаева (16–22 июня 1997 г., г.Казнь). Казань: изд-во Казанского матем. об-ва, 1997. С.61–63.
- [27] **Смирнов О.И.** О константах Джексона в пространстве $l_2(\mathbf{Z}_2^n)$ // Алгебра и анализ. Тезисы докладов школы-конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М.Гагаева (16–22 июня 1997 г., г.Казнь). Казань: изд-во Казанского матем. об-ва, 1997. С.199–200.
- [28] **Дельсарт Ф.** Алгебраический подход к схемам отношений теории кодирования. М.: Мир, 1976.
- [29] **Кабатянский Г.А., Левенштейн В.И.** О границах для упаковок на сфере и в пространстве // Проблемы передачи информации. 1978. Т.14, вып.1. С.3–25.
- [30] **Odlyzko A.M., Sloane N.J.A.** New bounds on the number of unit spheres that can touch a unit sphere in n dimensions // J. of Combinatorial Theory, Series A 26. 1979. P.210–214.
- [31] **Конвей Дж., Слоэн Н.** Упаковки шаров, решетки и группы. Т.1,2. М.: Мир, 1990. 791 с.
- [32] **Юдин В.А.** Нижние оценки для сферических дизайнов // Известия АН СССР. Серия матем. 1987. Т.61, N 3. С.213–223.

- [33] **Стечкин С.Б.** О нулях дзета-функции Римана // Матем. заметки. 1970. Т.8, вып.4. С.419–429.
- [34] **Арестов В.В.** Об экстремальных свойствах неотрицательных тригонометрических полиномов // Тр. Ин-та матем. и мех. УрО РАН, 1992. Т.1. С.50–70.
- [35] **Gasper G.** Positivity and the convolution structure for Jacobi series // Ann. of Math. 1971. V.93. PP.112–118.
- [36] **Gasper G.** Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel // Ann. of Math. 1972. V.95. PP.261–280.
- [37] **Koornwinder T.** The addition formula for Jacobi polynomials and spherical harmonics // SIAM J. Appl. Math. 1973. V.25, N 2. PP.236–246.
- [38] **Koornwinder T.** Jacobi polynomials, II. An analytic proof of the product formula // SIAM J. Math. Anal. 1974. V.5, N 1. PP.125–137.
- [39] **Gasper G., and Trebels W.** Multiplier criteria of Marcinkiewicz type for Jacobi expansions // Trans. Amer. Math. Soc. 1977. V.231, N 1. PP.117–132.
- [40] **Шапиро Р.Л.** Специальные функции, связанные с представлением группы $SU(n)$ класса I относительно $SU(n-1)$ ($(n-1) \geq 3$) // Известия вузов. Математика. 1968. N 4 (71). С.97–107.
- [41] **Le Gendre A.M.** Exercices de calcul intégral sur divers ordres de transcendentes et sur les quadratures. Т.2. Paris, 1817.
- [42] **Ватсон Г.Н.** Теория бесселевых функций. Ч.1 – М.: ИЛ, 1949. 798 с.
- [43] **Ragozin D.L.** Constructive polynomial approximation on spheres and projective spaces // Transactions of the Amer. Math. Soc. 1971. V.162. PP. 157–170.
- [44] **Никольский С.М., Лизоркин П.И.** Аппроксимация функций на сфере // Известия АН СССР. Серия матем. 1987. Т.51, N 3. С.635–651.
- [45] **Федоров В.М.** Приближение функций на сфере // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 1990. N 1. С.15–23.
- [46] **Платонов С.С.** О теоремах джексоновского типа на компактном симметрическом пространстве ранга 1 // ДАН. 1997. Т.353, N 4. С.445–448.

- [47] **Иванов В.И., Смирнов О.И.** Константы Джексона в пространствах L_2 на метрических компактах// Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. 1996. Т.2. Выпуск 1. С.93–118.
- [48] **Иванов В.И.** Константы Джексона в пространствах L_p на метрических компактах// Алгебра и анализ. Тезисы докладов школы-конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Б.М.Гагаева (16–22 июня 1997 г., г.Казнь). Казань: изд-во Казанского матем. об-ва, 1997. С.98–101.
- [49] **Хелгасон С.** Группы и геометрический анализ. – М.: Мир, 1987. 735 с.

Институт математики и механики
Уральского отделения РАН
620219, Екатеринбург, ГСП–384, ул. С. Ковалевской, 16.
Телефон: (34–32) 49–32–35 (служебный).
Факс: (34–32) 74–25–81.
E-mail: Alexander.Babenko@imm.uran.ru
Бабенко Александр Григорьевич